



Etude dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids

Thomas Lepers

► To cite this version:

Thomas Lepers. Etude dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2010. Français. NNT: . tel-00522059

HAL Id: tel-00522059

<https://theses.hal.science/tel-00522059>

Submitted on 30 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon-I

Ecole Doctorale de Physique et d'Astrophysique

pour l'obtention du

DIPLOME de DOCTORAT
Spécialité : Physique Nucléaire et Théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Thomas LEPERS

Etude dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids

Soutenue le 25 juin 2010
devant la Commission d'Examen

Jury :	Mme	M.	Ericson	Présidente du jury
	M.	J.	Aichelin	Rapporteur
	M.	P.	Schuck	Rapporteur
	M.	D.	Davesne	Directeur de thèse
	M.	M.	Urban	
	M.	X.	Leyronas	

Doctorat de physique théorique

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I

THOMAS LEPERS

Etude dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids

Sous la direction de DANY DAVESNE

25 Juin 2010

Institut de physique nucléaire
Université Claude Bernard Lyon I

Table des matières

Introduction	7
1 La physique du BEC-BCS crossover	9
1.1 Le BEC-BCS crossover	9
1.1.1 La condensation de Bose Einstein (BEC)	9
1.1.2 Superfluidité BCS	11
1.1.3 Description théorique du BEC-BCS crossover	13
1.1.4 Unitarité	14
1.2 Réalisation d'un BEC-BCS crossover	14
1.2.1 Les méthodes de refroidissement	15
1.2.2 Le piégeage des atomes	15
1.2.3 La réalisation d'un BEC-BCS crossover	16
1.3 Les différents régimes dynamiques	17
1.3.1 Le régime sans collision, non-superfluide	17
1.3.2 Le régime hydrodynamique	17
1.4 Modes collectifs	18
1.4.1 Utilisation des modes collectifs	18
1.4.2 Mode de compression quadrupolaire	18
1.4.3 Mode de surface quadrupolaire	20
1.4.4 Mode ciseaux	21
1.5 Cadre d'étude	22
1.5.1 Théorie de la diffusion	22
1.5.2 Les résonances de Feshbach	24
1.5.3 L'interaction à deux corps	26
1.5.4 Approximation d'échelle	27
2 L'interaction effective dans le milieu	29
2.1 L'approximation de Hartree	29
2.2 La matrice T	30
2.2.1 Dans le vide	30
2.2.2 Effets de milieu	32
2.3 La self-énergie Σ	33
2.3.1 Relation de dispersion des quasiparticules	34
2.3.2 Température critique, critère de Thouless	35
2.4 La densité	35
2.4.1 Les cas libre et perturbatif	36
2.4.2 Le cas Hartree-Fock	37

2.4.3	Les corrélations	38
2.4.4	Quasiparticule	39
2.5	La section efficace	40
2.6	Approximation de densité locale	42
3	Fréquence et amortissement des modes collectifs	44
3.1	Théorie cinétique : équation de Boltzmann	44
3.2	Fonction test Φ	47
3.3	Fréquence et amortissement sans champ moyen	48
3.3.1	Etude du temps de relaxation	48
3.3.2	Détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode	48
3.4	Fréquence et amortissement dans le cas Hartree	50
3.4.1	Les énergies	50
3.4.2	Fréquence et amortissement	52
3.5	Théorème du viriel généralisé	53
3.6	Fréquence et amortissement au-delà du champ moyen	53
3.6.1	Mode de Kohn	54
3.6.2	Mode ciseaux	54
3.6.3	Mode radial quadrupolaire	55
3.6.4	Mode radial de respiration	55
3.7	Résultats et discussion	56
3.7.1	Mode radial quadrupolaire à $1/k_F a = -1.34$	56
3.7.2	Mode ciseaux à $1/k_F a = -0.45$	58
3.7.3	Modes collectifs dans la limite unitaire	59
3.7.4	Conclusion	61
4	Résolution numérique de l'équation de Boltzmann	63
4.1	Description physique du problème	63
4.1.1	Méthode des particules tests	63
4.1.2	Equations du mouvement	64
4.1.3	Propagation des particules	65
4.1.4	Le terme de collision	65
4.1.5	Le taux de collisions	66
4.1.6	Le potentiel de piège	67
4.2	Résolution numérique	68
4.2.1	Extension finie	69
4.2.2	Calcul du terme de collision	70
4.2.3	Description lagrangienne	71
4.2.4	Initialisation	72
4.2.5	Méthode de propagation	72
4.2.6	Optimisation	73
4.2.7	Conservation de l'énergie	74
4.2.8	Stabilité de la distribution d'équilibre	76
4.2.9	Convergence du taux de collisions	77
4.2.10	Expansion libre du gaz	79
4.3	Etude théorique du mode quadrupolaire	81
4.3.1	Excitation des modes	81

4.3.2	Mode de Kohn	82
4.3.3	Mode de respiration	84
4.3.4	Mode quadrupolaire dans le cas classique	85
4.3.5	Réponse du mode quadrupolaire	87
4.3.6	Comparaison avec la méthode des moments	89
4.3.7	Détermination de la réponse temporelle	90
4.4	Etude de la réponse du système dans un cas particulier	91
4.4.1	Comparaison des différentes réponses	91
4.4.2	Fréquence et amortissement du mode	93
4.4.3	Erreurs sur la fréquence et l'amortissement	93
4.5	Comparaison sur une gamme de température	94
4.5.1	Taux de collisions sur une gamme de température	94
4.5.2	Temps de relaxation du gaz d'atomes	96
4.5.3	Fréquence et amortissement du mode quadrupolaire	98
4.6	Méthode des moments d'ordre supérieur	100
4.6.1	Détermination de la réponse	100
4.6.2	Etude de la réponse	103
4.7	Perspectives	105
Conclusion		107
A Calcul de I_S		110
B Détermination de l'équation des modes		112
B.1	Mode ciseaux	112
B.2	Mode radial quadrupolaire	115
B.3	Mode radial de respiration	115
C Coefficients de la matrice des moments d'ordre 4.		117

Résumé

Grace aux progrès énormes des techniques de refroidissement, des expériences actuelles avec des atomes fermioniques piégés atteignent des températures extrêmement basses de l'ordre du nanoKelvin. Le but principal de ces expériences est l'étude de la transition nommée "BEC-BCS crossover". Pour cela, on change le champ magnétique autour d'une résonance de Feshbach, ce qui implique que la longueur de diffusion change des valeurs répulsives (a positif), à travers la limite unitaire (a infini) aux valeurs attractives (a négatif). Du côté BEC, où le système forme un condensat de Bose-Einstein de molécules fortement liées, aussi bien que du côté BCS, où les atomes forment des paires de Cooper qui ont une grande extension par rapport à la distance moyenne entre les atomes, on s'attend à ce que le système devienne superfluide, à condition que la température soit inférieure à une certaine température critique. Afin de trouver des signes sans équivoque de la superfluidité, il est nécessaire de regarder des observables dynamiques comme l'expansion du nuage atomique lorsque le piège est éteint ou des oscillations collectives du nuage.

Le travail effectué au cours de cette thèse est une étude de la dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids. Nous avons développé un modèle basé sur l'évaluation de la matrice T . L'utilisation de l'équation de transport de Boltzmann pour les particules permet ensuite une étude semi-numérique des modes collectifs dans tous les régimes d'interaction. Cette étude a permis de mettre en évidence pour la première fois que la fréquence du mode radial quadrupolaire est supérieure à deux fois la fréquence du piège, comme cela est vérifié expérimentalement et contrairement aux premières théories n'incluant pas les effets de champ moyen. Les résultats obtenus ont aussi mis en évidence la nécessité d'une résolution numérique complète de l'équation de Boltzmann et de l'amélioration des techniques de détermination des observables physiques du gaz. Cette résolution numérique de l'équation de Boltzmann a montré que la détermination du temps de relaxation par la méthode des moments est erronée de 30%, ce qui influe fortement sur la détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode collectif. Enfin, l'amélioration de la méthode des moments, considérant l'ordre supérieur, permet d'améliorer sensiblement l'accord avec le résultat numérique. Une telle investigation n'avait jamais été réalisée et montre la nécessité de considérer les moments d'ordre supérieurs pour l'étude des modes collectifs par l'équation de Boltzmann d'un gaz de fermions dans la phase normale.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Dany Davesne qui a encadré ce travail de thèse. Il a porté une attention soutenue à mon travail avec de nombreux échanges et une grande disponibilité.

Ce travail a été effectué en étroite collaboration avec Michael Urban, il a su me faire profiter de ses connaissances sur le domaine des atomes au cours des nombreuses visites et discussions téléphoniques.

Je remercie aussi tout particulièrement Madame Ericson de l'intérêt qu'elle a porté à mon travail durant ces trois années de thèse. Madame Ericson m'a aussi fait l'honneur d'accepter d'être présidente de mon jury de thèse.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Aichelin et Schuck de l'intérêt qu'ils ont porté à mon manuscrit et d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. De même, je remercie Monsieur Leyronas d'avoir accepté de faire partie du jury.

Au cours de cette thèse, j'ai eu le plaisir de travailler avec Silvia Chiacchiera qui est une physicienne d'une honnêteté et d'une efficacité sans pareil.

Je remercie aussi Michèle Leduc, directrice de l'Institut Francilien de Recherche sur les Atomes Froids (IFRAF) de m'avoir conseillé, notamment pour les membres de mon jury de thèse.

Je tiens aussi à remercier Corentin d'avoir bien voulu attendre que je termine de rédiger mon manuscrit, cela nous a permis de passer par la suite des moments inoubliables.

Enfin, le dernier remerciement sera pour Sophie qui m'a accompagné personnellement pendant ces trois années et pendant bien plus longtemps encore.

Introduction

Après la première réalisation d'un condensat de Bose-Einstein en 1995 pour une vapeur diluée d'atomes, de nouvelles perspectives ont été ouvertes dans ce domaine de recherches.

L'idée de base du condensat de Bose-Einstein (BEC) date de 1925, quand Einstein, sur la base d'un article du physicien Indien S.N. Bose (1924) [1] traitant la description statistique des quantas de lumière, prédit l'apparition d'une transition de phase dans un gaz d'atomes sans interaction. Cette transition de phase est associée avec la condensation d'atomes dans l'état de plus basse énergie et est la conséquence des effets de statistique quantique [2]. Pendant longtemps, ces prédictions n'ont pas eu d'impact pratique. En 1938, F.London, juste après la découverte de la superfluidité de l'hélium liquide, eut l'intuition que cette superfluidité pouvait être une manifestation de la condensation de Bose-Einstein. Puis, la première théorie autocohérente des superfluides a été développée par Landau (1941) en terme de spectre des excitations élémentaires du fluide. En 1947, Bogoliubov élabore la première théorie microscopique des gaz de bosons en interaction, basée sur le concept de condensat de Bose-Einstein. Les études expérimentales sur les gaz d'atomes dilués ont été développées plus tard, à partir des années 1970, profitant de nouvelles techniques de physique atomique basées sur le piégeage optique et magnétique. Les premières études qui ont porté sur l'hydrogène, considéré comme le candidat le plus sérieux pour une condensation de Bose-Einstein, ont permis de s'approcher fortement du BEC. Dans les années 1980, l'amélioration des techniques de refroidissement laser et de piégeage magnéto-optique ont rendu possible le refroidissement et piégeage d'atomes neutres. Les alcalins permettent d'exploiter au maximum ces techniques car leurs transitions optiques sont accessibles avec ces lasers et la structure de leurs niveaux d'énergie interne permet de les refroidir fortement. Une fois les atomes piégés, la température peut encore être diminuée à l'aide du refroidissement par évaporation. Ainsi, pendant plusieurs années les gaz de nature bosonique ont été étudiés pour examiner les conséquences importantes de la condensation de Bose-Einstein. Puis, après la réalisation d'un BEC pour les bosons, d'importants efforts ont été faits pour réaliser un gaz de Fermi dégénéré. Bien que la structure explicite des niveaux hyperfins diffère entre les isotopes bosoniques et fermioniques car le spin nucléaire est différent, le piégeage magnétique peut être utilisé dans les deux cas. Le but de ces études était d'atteindre les très basses températures (\sim nK), où l'on espère observer la transition Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS), qui est similaire à ce qui se passe dans les supraconducteurs ou l'hélium liquide (^3He). La possibilité de contrôler l'interaction entre particules *via* les résonances de Feshbach a permis de réaliser des condensats de Bose Einstein de molécules composées de deux fermions et de modifier continuellement l'interaction afin de passer d'un condensat de Bose-Einstein à un gaz de fermions dans une phase superfluide BCS. Cette transition continue est appelée le BEC-BCS crossover. Les principales réussites de l'étude de cette transition ont été, par exemple, l'étude du caractère superfluide incluant la nature hydrodynamique des oscilla-

tions collectives ou encore la réalisation de vortex quantiques, signature de la superfluidité dans la partie BCS du BEC-BCS crossover. Néanmoins, l'étude de la phase normale (non-superfluide) permet aussi d'explorer des aspects importants de la physique dominée par la statistique de Fermi, tel que le principe d'exclusion de Pauli qui affecte significativement les propriétés collisionnelles du gaz.

D'un point de vue théorique, les premiers efforts ont été réalisés pour améliorer la théorie de Gross-Pitaevski [3, 4, 5] des gaz de Bose piégés interagissant faiblement. Cette théorie de champ moyen, non linéaire, est capable de rendre compte de nombreuses quantités mesurées expérimentalement dans les condensats de Bose-Einstein comme les profils de densité, les oscillations collectives ou encore la structure des vortex. L'attention des théoriciens s'est ensuite tournée vers les phénomènes qui ne peuvent pas être décrits par cette théorie de champ moyen, comme par exemple, le rôle des corrélations pour des systèmes en rotation rapide [6]. Les fermions pouvant former des paires pour obtenir des bosons, on peut voir la physique des bosons comme un cas particulier de la physique des fermions où les paires sont fortement liées et où le caractère fermionique des constituants n'interviendrait plus. La physique des fermions en interaction permet alors d'aborder de nombreuses questions fondamentales; c'est ce qui constitue évidemment la principale motivation pour de telles études.

Aujourd'hui, le champ d'étude des atomes froids s'est largement étendu, notamment avec l'étude des systèmes asymétriques [7] ou encore la recherche de la phase FFLO [8]. L'amélioration des techniques de piégeage permet désormais d'obtenir des ions froids piégés dont l'étude expérimentale rend possible la réalisation des systèmes d'information quantique [9], de simuler l'équation de Dirac [10], de mesurer des constantes fondamentales avec une précision inégalée [11, 12]. D'autre part, les atomes froids dans un réseau optique permettent de simuler des expériences de matière condensée [13, 14], la dynamique hors équilibre des systèmes interagissant fortement tels que la transition entre isolateur de Mott et phase superfluide à partir du modèle de Bose-Hubbard [15], la décroissance d'états excités doublement occupés dans le modèle de Fermi-Hubbard [16] et l'apparition du magnétisme [17]. Enfin, cette étude pourrait relier la gravitation avec la statistique de spins [18]. Cette thèse se situe donc dans un champ de recherches en constante expansion et dont l'étude expérimentale est étroitement liée aux études théoriques actuelles.

Le travail effectué au cours de cette thèse se place dans le cadre des gaz de fermions froids dont l'étude des modes collectifs permet de donner une description de l'interaction fondamentale entre particules ainsi que d'étudier les différentes phases du gaz. Tout d'abord, nous donnerons une vision générale de la physique du BEC-BCS crossover avec notamment une description des modes collectifs et des différents éléments théoriques nécessaires pour notre étude (Partie I). Puis nous verrons le modèle, utilisé pour décrire l'interaction dans le système, qui est basé sur l'évaluation de la matrice T , soit le processus de diffusion des particules (Partie II). L'utilisation de l'équation de transport de Boltzmann pour les particules permet ensuite une étude semi-analytique des modes collectifs dans tous les régimes d'interaction (Partie III). Les résultats obtenus ont conduit à une publication [19] et ont mis en évidence la nécessité d'une résolution numérique complète de l'équation de Boltzmann dont l'on décrit les principales étapes (Partie IV). Les premiers résultats de cette étude sont présentés et montrent un écart systématique entre la détermination du temps de relaxation du mode collectif par la méthode des moments et par la simulation. Ainsi, nous avons étudié la méthode des moments d'ordre supérieur pour retrouver un meilleur accord et expliquer l'écart entre les données expérimentales et les valeurs théoriques de la troisième partie.

Chapitre 1

La physique du BEC-BCS crossover

Nous allons commencer par introduire le sujet de la physique des gaz de fermions confinés dans un potentiel. Nous verrons les points importants de la physique du BEC-BCS crossover avec notamment les différents régimes mais aussi les modes collectifs dont l'étude expérimentale et théorique permet de décrire de nombreuses observables comme le champ moyen ou la section efficace de collision.

1.1 Le BEC-BCS crossover

1.1.1 La condensation de Bose Einstein (BEC)

La physique du condensat de Bose Einstein est connue depuis longtemps et décrite dans de nombreux ouvrages (cf [20] par exemple). On considère dans ce qui suit un gaz de bosons sans interaction qui constitue l'exemple le plus simple de réalisation d'un condensat de Bose Einstein et qui prédit correctement des propriétés importantes des systèmes actuels.

Pour des bosons sans interaction à l'équilibre thermodynamique, le nombre d'occupation moyen d'une particule dans l'état ν avec une énergie E_ν est donnée par la fonction de distribution de Bose Einstein¹ :

$$n(E_\nu) = \frac{1}{\exp[(E_\nu - \mu)/k_B T] - 1} \quad (1.1)$$

où le potentiel chimique μ est fixé par la condition de normalisation $N = \sum_\nu n(E_\nu)$ et peut donc être calculé en fonction de T et N . Le potentiel chimique du boson est soumis à la condition $\mu < E_0$, où E_0 est l'énergie du fondamental. Pour les hautes températures, le nombre d'occupation moyen est beaucoup plus petit que 1, la fonction de distribution est alors bien approximée par la fonction de distribution classique de Boltzmann. D'autre part, si la température diminue avec un nombre constant de particules N , le potentiel chimique augmente avec une limite stricte supérieure E_0 ($\mu < E_0$). En effet, le nombre d'occupation qui diverge pour $\mu = E_0$, devient négatif si le potentiel chimique dépasse cette valeur minimale de l'énergie. Ainsi, lorsque μ augmente, le nombre d'occupation de l'état fondamental

$$N_0 = n(E_0) = \frac{1}{\exp[(E_0 - \mu)/k_B T] - 1} \quad (1.2)$$

¹On ne tient pas compte ici d'un éventuel facteur de dégénérescence de spin.

devient très grand. Ce mécanisme est à l'origine de la condensation de Bose Einstein : la condensation de Bose Einstein correspond à une population macroscopique de l'état fondamental d'un gaz de bosons qui apparaît en dessous d'une température critique T_C . Pour obtenir un critère de condensation de Bose-Einstein, on considère le nombre d'atomes dans les états excités : $N_E = N - N_0$. Pour une température T donnée, N_E atteint un maximum dans la limite $\mu \rightarrow E_0$, ce nombre est déterminé par :

$$N_E^{max} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{\exp[(E_\nu - E_0)/k_B T] - 1}. \quad (1.3)$$

Si la température descend sous la valeur T_C , N_E^{max} devient beaucoup plus petit que N . Par conséquent, N_0 est de l'ordre de N : il y a peuplement macroscopique de l'état fondamental.

Remarquons que pour un grand nombre de particules, $k_B T_C$ est bien plus grand que l'écart entre deux niveaux énergétiques ΔE et que l'énergie du fondamental E_0 (qui détermine aussi la valeur du potentiel chimique). Ainsi, lorsque $T \rightarrow T_C$, $\mu \rightarrow E_0$ et $\frac{E_0 - \mu}{k_B T_C} \ll 1$. On peut alors considérer que le potentiel chimique est nul dans la discussion qui suit.

Dans un piège harmonique à trois dimensions de fréquence ω et avec une description continue du système, on peut réécrire l'équation précédente en utilisant la densité d'états² $g(\epsilon) = \epsilon^2/2\hbar^3\omega^3$. Le nombre maximum d'atomes dans un état excité devient alors :

$$N_E^{max} = \int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega^3} \frac{1}{\exp[\epsilon/k_B T] - 1} d\epsilon. \quad (1.4)$$

En utilisant $(\exp(\beta\epsilon) - 1)^{-1} = \sum_{j=1}^\infty \exp(-j\beta\epsilon)$, on obtient pour le calcul de cette intégrale :

$$N_E^{max} = \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 \zeta(3) \quad (1.5)$$

où $\zeta(3) \simeq 1.202$ est la fonction Zeta de Riemann, $\zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$. Au seuil du phénomène de condensation, la majorité des atomes est encore dans des niveaux excités. Toute nouvelle diminution de la température fera croître prodigieusement la population du fondamental. La température seuil s'exprime donc par la relation :

$$N = \left(\frac{k_B T_C}{\hbar\omega} \right)^3 \zeta(3), \quad (1.6)$$

²Pour un oscillateur harmonique à 3 dimensions, on a :

$$\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{p^2}{2m} = E$$

qui se réduit à $\tilde{r}^2 + \tilde{p}^2 = E$ avec $\tilde{r} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}r$ et $\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{2m}}$. Le nombre de particules $n(E)$ ayant une énergie inférieure à E est donc le volume de la sphère à 6 dimensions divisé par le volume d'une particule de l'espace des phases (avec les notations \tilde{r} et \tilde{p}). Ainsi, on obtient :

$$n(E) = \frac{\frac{\pi^3}{6}E^3}{\hbar^3\omega^3/8} = \frac{1}{6} \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^3$$

La densité d'états étant le nombre de particules ayant une énergie comprise entre E et $E + dE$, il vient finalement :

$$g(E) = \frac{dn}{dE}(E) = \frac{E^2}{2\hbar^3\omega^3}$$

soit

$$T_C = \frac{\hbar\omega}{k_B\zeta(3)} N^{1/3}. \quad (1.7)$$

En dessous de la température critique, les niveaux excités ne suffisent plus à contenir la population des N atomes. Le niveau fondamental se peuple alors de manière macroscopique. La fraction d'atomes condensés $N_0/N = (N - N_E^{max})/N$ se calcule à partir des équations (1.5) et (1.6), et donne :

$$N_0/N = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^3. \quad (1.8)$$

Ainsi, en dessous de la température critique T_C^{BEC} , un gaz de bosons forme un condensat de Bose-Einstein, cet état a été observé pour la première fois [21]. La possibilité de contrôler l'interaction entre les particules a permis de former des BEC de molécules composées de deux fermions. Nous allons voir maintenant que pour un gaz de fermions, il existe aussi un état particulier lorsque la température est inférieure à une température critique T_C^{BCS} caractéristique de cet état.

1.1.2 Superfluidité BCS

Dans le cas des fermions, la présence d'une interaction entre particules peut se manifester de deux manières différentes. Une interaction forte peut grouper un nombre pair de particules et former des entités fortement localisées et obéissant à la statistique de Bose-Einstein. On est ramené au cas BEC par la formation de molécules diatomiques composées de deux fermions. En revanche, s'il n'y a pas une interaction suffisamment importante pour former des molécules, ces fermions subissent à basse température une transition de phase présentant une analogie indéniable avec la condensation de Bose-Einstein. La première théorie microscopique satisfaisante pour décrire ce phénomène est due à Bardeen, Cooper et Schrieffer, cette théorie est universellement connue sous le nom de théorie BCS.

Pour des fermions identiques sans interaction et à l'équilibre thermodynamique, le nombre d'occupation moyen d'une particule dans l'état ν avec une énergie E_ν est donnée par la fonction de distribution de Fermi-Dirac³ :

$$n(E_\nu) = \frac{1}{\exp[(E_\nu - \mu)/k_B T] + 1} \quad (1.9)$$

où le potentiel chimique μ est fixé par la condition de normalisation $N = \sum_\nu n(E_\nu)$ n'est ici soumis *a priori* à aucune contrainte. Dans la limite de température nulle ($T = 0$), tous les états ayant une énergie inférieure au potentiel chimique sont occupés tandis que tous les autres sont inoccupés. La notion de potentiel chimique à température nulle, aussi appelée énergie de Fermi, est donc très importante :

$$E_F = \mu(T = 0) \equiv k_B T_F \quad (1.10)$$

où T_F est la température de Fermi. Pour des températures telles que $T < T_F$, on dit que le gaz est dégénéré. A partir de l'énergie de Fermi, on peut aussi définir le nombre d'onde de Fermi par la relation :

$$k_F = \frac{\sqrt{2mE_F}}{\hbar}. \quad (1.11)$$

³De même que pour la condensation de Bose-Einstein, on ne tient pas compte ici d'un éventuel facteur de dégénérescence de spin.

Pour comprendre simplement l'idée de la théorie de formation de paires BCS, considérons un système de N fermions identiques de masse m et de spin $\frac{1}{2}$ dans l'état fondamental (la mer de Fermi). Si on ajoute deux nouvelles particules, le nouvel état fondamental est obtenu en mettant ces deux particules dans l'état disponible de plus basse énergie. Mais ceci est vrai seulement s'il n'y a pas d'interactions entre particules. Que se passe-t-il alors s'il existe une interaction attractive $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ entre les deux particules ajoutées ?

En général, la fonction d'onde de ce système est donnée par le produit antisymétrique d'une fonction d'onde de paire corrélée $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \alpha, \beta)$ et un déterminant de Slater à N particules décrivant la mer de Fermi. La fonction d'onde est un produit de la fonction d'onde plane du centre de masse, de la fonction d'onde décrivant le mouvement relatif $\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ et de la fonction de spin $\chi(\alpha, \beta)$:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \alpha, \beta) = \exp\left[\frac{1}{2}i\mathbf{P} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)\right] \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \chi(\alpha, \beta). \quad (1.12)$$

Comme les particules sont identiques par construction, la fonction d'onde de paire doit être antisymétrique par échange de 1 et 2 impliquant que le produit $\psi(\mathbf{r})\chi(\alpha, \beta)$ est impair.

L'effet important des particules dans la mer de Fermi est de bloquer les états à une particule sous l'énergie de Fermi. On peut plus facilement regarder cela en travaillant dans l'espace des moments, on définit les composantes de Fourier :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k}} \quad (1.13)$$

et

$$V_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} V_{\mathbf{r}}. \quad (1.14)$$

A partir de la fonction d'onde de paire, on peut obtenir, dans l'espace des moments, l'équation de Schrödinger de paire :

$$(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{P}/2} + \xi_{\mathbf{k}-\mathbf{P}/2} - E) \Psi_{\mathbf{k}} = -(2\pi)^3 \int_{k' > k_F} d\mathbf{k}' V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \Psi_{\mathbf{k}'} \quad (1.15)$$

où $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu$ est l'énergie des quasiparticules. A partir de cette équation, on voit que l'énergie la plus basse est obtenue si les particules ont des moments de norme égale et de direction opposée. En posant $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ et en supposant une interaction isotrope, on peut développer $\Psi_{\mathbf{k}}$ et $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ en terme de polynômes de Legendre. Avec un potentiel constant proche de la surface de Fermi et nul ailleurs, on obtient alors l'équation :

$$(2\xi_{\mathbf{k}} - E) \Psi_l(k) = -V_l g(E_F) \int_0^{\epsilon_c} \Psi_l(k') d\xi_{k'} \quad (1.16)$$

où la densité d'état $g(E_F)$ a été considérée constante pour être sortie de l'intégrale. A partir de cette équation, on voit directement que pour une interaction attractive ($V_l < 0$), la valeur propre d'énergie E est nécessairement négative. Donc, en présence de la mer de Fermi, les deux particules forment un état lié pour une interaction attractive faible. Cette paire corrélée est appelée paire de Cooper.

Dans un cas plus général où toutes les particules interagissent, la formation d'une paire corrélée de particules de moment $(\hbar\mathbf{k}, -\hbar\mathbf{k})$ est toujours énergétiquement avantageuse. Ceci

amena Bardeen, Schrieffer et Cooper à postuler une fonction d'onde corréllée pour les électrons dans un supraconducteur qui est un produit antisymétrique des fonctions d'onde de paires.

L'émergence d'une nouvelle physique pour une température inférieure à la température critique T_C^{BCS} a été étudiée expérimentalement dans les gaz d'atomes froids. De plus, la possibilité de contrôler l'interaction entre particules permet de former des molécules bosoniques dans un état BEC (pour $T < T_C^{BEC}$) composées de deux fermions pour une longueur de diffusion grande et positive. Ces mêmes atomes forment des paires de Cooper (pour $T < T_C^{BCS}$) si l'interaction conduit à une longueur de diffusion grande et négative. La possibilité de passer continuellement d'un état BEC vers un état BCS dans un tel système a été observée expérimentalement [22]. Toutes les grandeurs physiques telles que la densité du gaz sont continues, on parle donc du BEC-BCS crossover.

1.1.3 Description théorique du BEC-BCS crossover

Nous avons vu au cours des sections précédentes la physique du condensat de Bose-Einstein (BEC) et la supraconductivité BCS. Bien que ces deux physiques concernent à la fois des bosons et des fermions, il est possible de passer continuellement d'un état BEC à un état BCS *via* le contrôle d'un champ magnétique externe. Cette dénomination de crossover se justifie notamment par la continuité du profil de densité du gaz dans le piège harmonique. La réalisation d'un BEC-BCS crossover n'est pas possible avec n'importe quel gaz d'atomes de fermions froids. Il faut des propriétés particulières des fermions, notamment la possibilité de contrôler la longueur de diffusion a en fonction d'un champ magnétique externe *via* le phénomène de résonance de Feshbach. Nous décrirons plus tard ces résonances. On peut néanmoins retenir que la nature du gaz dépend du paramètre adimensionné $1/k_F a$ avec k_F le nombre d'onde de Fermi et a la longueur de diffusion du gaz. Pour des valeurs de $1/k_F a$ positives et très grandes, on est du côté BEC. Pour une température du gaz inférieure à la température critique T_C , le gaz subit une condensation de Bose-Einstein. Si $1/k_F a \ll -1$, on est du côté BCS. Le gaz est dans une phase de supraconductivité BCS pour $T < T_C$. Dans le régime $-1 \leq 1/k_F a \leq 1$, on est dans le régime d'interaction forte, on ne peut plus décrire simplement le gaz avec les théories BEC et BCS pour un gaz sans interaction.

Le crossover d'un système superfluide à partir d'un régime BEC vers un régime BCS peut être compris simplement en considérant les deux cas limites. Pour une longueur de diffusion a positive qui correspond à une interaction répulsive entre les particules, les fermions sont dans un état lié de molécules (bosons) et l'état fondamental à $T = 0$ est un condensat de Bose-Einstein. La nature des paires est le point important à comprendre pour déterminer comment le système est modifié au cours du crossover. Dans la partie BEC, les paires sont des molécules donc des bosons que l'on étudie *via* la physique à deux corps. Dans ce cas, l'énergie de liaison est grande par rapport à toutes les autres énergies du problème et la taille des molécules est beaucoup plus petite que la distance moyenne entre molécules. On peut donc décrire l'interaction uniquement *via* les collisions entre molécules pour lesquelles on connaît la longueur de diffusion. Dans la partie BCS, deux atomes de moments opposés forment une paire de Cooper sur la surface de la sphère de Fermi. L'énergie d'appariement est faible comparée à l'énergie de Fermi et les paires de Cooper ont une taille moyenne beaucoup plus grande que l'espace moyen entre particules. Dans le régime de forte interaction, les paires ne sont ni des molécules ni des paires de Cooper, mais les deux aspects de la physique sont mélangés (Fig. 1.1).

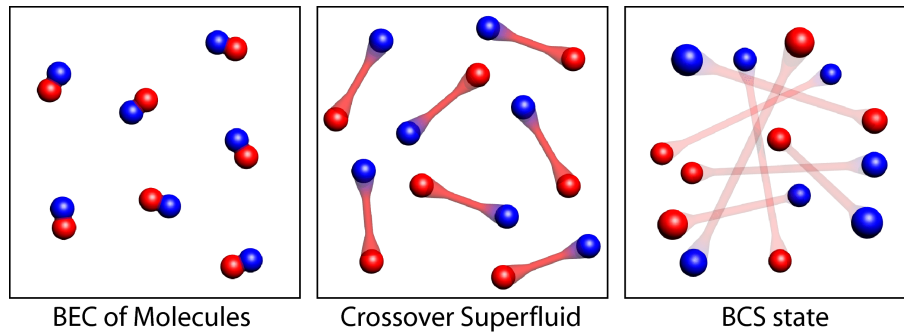


FIG. 1.1 – Le BEC-BCS crossover. En modifiant l'interaction entre les deux fermions de spins différents, on peut passer d'un régime de molécules fortement liées à un régime de paire de Cooper à longue portée dont la taille caractéristique est plus grande que la distance entre particules. Entre ces deux régimes limites, on rencontre un régime intermédiaire où la taille des paires est comparable à la distance interparticules. Figure extraite de [23].

1.1.4 Unitarité

Un problème compliqué concerne l'étude du comportement du système dans le cas $k_F|a| \geq 1$ donc dans le cas d'une longueur de diffusion qui devient plus grande que la distance interparticule. Ceci correspond au cas inhabituel où le gaz est dilué et en forte interaction en même temps. En effet, comme le nombre de particules du gaz est constant, le moment de Fermi k_F est fixe. Le cas $k_F|a| \geq 1$ correspond à une augmentation de la longueur de diffusion $|a|$, on se retrouve donc le cas d'un gaz toujours dilué mais dont les particules sont en interactions fortes entre elles. Dans ce cas, il n'est pas évident de savoir si le système est stable ou est susceptible de s'effondrer. De plus, si le gaz est stable, on ne sait pas si le système sera superfluide comme dans les cas limites BEC et BCS. Pour l'instant, aucun résultat exact n'existe pour décrire ce régime, néanmoins des modèles et des simulations numériques décrivent le comportement du gaz [24, 25, 26]. Ces approches s'appuient aussi sur les résultats expérimentaux qui indiquent clairement que le système est stable et superfluide en dessous de la température critique. La limite $1/k_F a = 0$ est appelée limite d'unitarité. Dans ce régime, la longueur de diffusion n'est plus une quantité représentative du système. Les seules échelles de longueur qui restent sont l'inverse du nombre d'onde de Fermi k_F^{-1} et la longueur d'onde thermique. Toutes les quantités thermodynamiques deviennent alors des fonctions universelles de l'énergie de Fermi E_F et du rapport de température T/T_F . C'est l'universalité de la limite d'unitarité.

1.2 Réalisation d'un BEC-BCS crossover

Dans cette section, on décrit le dispositif expérimental nécessaire pour réaliser un refroidissement d'atomes. Puis on décrit l'obtention d'un système pouvant subir un crossover entre les phases BEC et BCS. Un tel système sera par la suite à la base de notre étude. On se placera ensuite toujours dans un système de fermions, soit du côté BCS de ce BEC-BCS crossover.

1.2.1 Les méthodes de refroidissement

La première étape de refroidissement des atomes est un refroidissement laser utilisant la pression de radiation et l'effet Doppler pour obtenir un gaz d'atomes initialement piégés à une température de l'ordre du mK [27]. Ensuite, afin d'atteindre des températures de l'ordre du nK , les expérimentateurs utilisent la technique de refroidissement par évaporation. Ce type de refroidissement repose sur l'élimination des atomes les plus énergétiques d'un gaz piégé dans un piège conservatif en parallèle à une rethermalisation des atomes restants à une température plus basse. La baisse en température peut s'effectuer sur plusieurs ordres de grandeur en abaissant le seuil en énergie de perte des atomes, au prix toutefois d'une importante perte d'atomes. Il est plus difficile de refroidir un gaz de fermions qu'un gaz de bosons. En effet, en dessous d'une température de l'ordre du mK *i.e.* bien avant d'entrer dans le régime dégénéré, les collisions entre fermions identiques dans le même état interne sont fortement inhibées par le principe de Pauli, ce qui limite l'efficacité du refroidissement par évaporation. Deux voies ont été empruntées pour contourner cette limitation : on prépare le gaz dans un mélange d'états internes avant l'évaporation, et les collisions se font entre atomes d'états internes différents, ou bien on refroidit le gaz par thermalisation avec un gaz de bosons simultanément présent (on parle alors de refroidissement sympathique) [28]. La plupart des résultats expérimentaux que l'on décrira au cours de cette thèse proviennent du groupe de Innsbruck qui utilise du 6Li refroidi sous la forme d'un mélange de deux états hyperfins.

1.2.2 Le piégeage des atomes

Le piège magnétique est une configuration de champ magnétique qui présente un minimum local où sont attirés les atomes dans l'état de spin adéquat. Les atomes dont le moment magnétique est négatif ressentent un minimum d'énergie au minimum du champ magnétique. L'élimination des atomes énergétiques se fait par envoi d'une onde radiofréquence qui transfère les atomes dans un état interne de moment magnétique positif, donc non piégé.

Le piège dipolaire optique utilise les forces conservatrices exercées par la lumière non résonnante sur un atome. Si la fréquence du laser est inférieure aux fréquences de transition d'un atome, ce dernier est attiré vers la région d'intensité laser maximale. Dans le cas contraire, l'atome est repoussé. De plus, avec l'effet Doppler, la fréquence laser "vue" par l'atome est modifiée, créant ainsi un piège dans la région d'intensité maximale du laser. On piège ainsi un gaz d'atomes au foyer d'un faisceau laser intense. Les atomes dont l'énergie est plus grande que la hauteur du puit d'énergie potentielle s'échappent du piège. L'évaporation est donc conduite en abaissant progressivement la puissance du laser.

Les expériences sur les gaz de 6Li interagissant fortement dans les différents laboratoires (Duke, ENS Paris, Innsbruck, MIT) sont basées sur différentes approches. Le problème général est de réussir à obtenir un nombre suffisamment important d'atomes de 6Li dans un faible volume donné par le piège dipolaire optique. Les expériences de l'ENS et du MIT utilisent un piège magnétique en étape intermédiaire, ce qui permet d'avoir un large volume et donc peu de pertes. Dans ce cas, on piège le 6Li avec son isotope bosonique 7Li afin de réaliser un refroidissement sympathique. Ensuite, les atomes se retrouvent uniquement dans un piège optique. Les expériences de Duke et Innsbruck procèdent sans piège magnétique afin d'obtenir directement les atomes dans le piège optique. Ceci nécessite néanmoins un

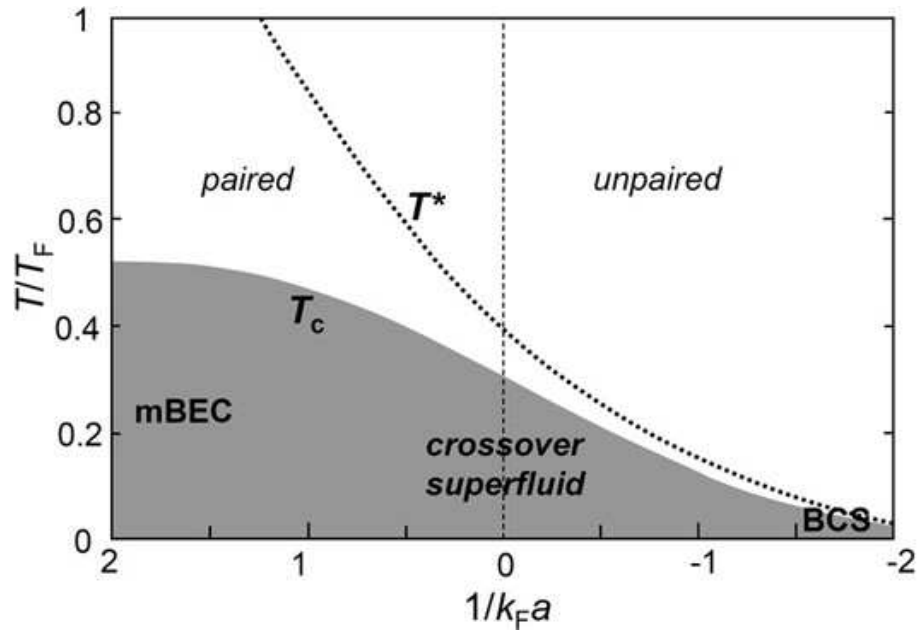


FIG. 1.2 – Représentation du diagramme de phase du BEC-BCS crossover. T_C correspond à la température critique donc à l'apparition d'un condensat de Bose-Einstein ou la manifestation d'une superfluidité type BCS. T^* est l'appariement et se confond avec T_C dans le cas d'un gaz de fermions avec interaction faible. Le système passe continuellement d'une phase BEC à une phase BCS lorsqu'on modifie le paramètre $1/k_F a$ donc le champ magnétique externe B . Courbe extraite de [29].

laser de grande puissance pour le piégeage initial.

1.2.3 La réalisation d'un BEC-BCS crossover

Comme nous en avons déjà parlé (Sec. 1.1.3), une propriété intéressante de certains gaz d'atomes froids est l'existence d'une résonance de diffusion qui dépend du champ magnétique extérieur, fixé par les expérimentateurs, ce qui permet de contrôler la longueur de diffusion et donc l'intensité de l'interaction entre particules. Dans ces résonances de Feshbach, les atomes forment des molécules diatomiques avec une énergie de liaison qui est contrôlée par un champ magnétique extérieur. Cet aspect expérimental est important pour les molécules formées à partir de fermions, car il permet de passer continuellement d'un couplage fort entre les molécules formées de deux atomes dans la limite des condensats de Bose-Einstein à un couplage faible dans la limite BCS (Fig. 1.2).

La première grande étape expérimentale dans l'étude du BEC-BCS crossover a été la réalisation de condensats de Bose-Einstein moléculaire. Ces condensats moléculaires servent désormais de point de départ pour les expériences de crossover entre un condensat de molécules faiblement liées et un état BCS de paires fortement corrélées. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons essentiellement aux expériences sur les atomes de ^6Li qui possèdent une large résonance de Feshbach pour un champ magnétique de 834G. Si le champ magnétique est beaucoup plus faible que cette valeur, le gaz est composé d'un BEC moléculaire où les molécules sont formées par des paires de courte portée. En augmentant le champ magnétique, l'interaction augmente et l'énergie de liaison des molécules diminue. A la réso-

nance, vers 834G, les processus de diffusion sont dans la limite unitaire, on obtient un gaz quantique universel. Au dessus de la résonance, la longueur de diffusion devient négative, il n'est plus possible d'avoir un état lié entre deux atomes, on a alors un gaz de fermions en interaction.

1.3 Les différents régimes dynamiques

Le comportement collectif du gaz dépend directement du comportement de chacune des particules qui le compose. Ainsi, dans le cas d'un gaz de fermions, nous allons voir dans les mouvements collectifs du gaz les effets du blocage de Pauli qui interdit l'occupation du même état quantique par deux atomes. L'observation de modes collectifs permet par ailleurs une étude détaillée des propriétés macroscopiques du gaz quantique. Il existe deux régimes principaux d'oscillations collectives dans la phase normale du côté BCS de la transition BEC-BCS : le régime hydrodynamique et le régime sans collision.

1.3.1 Le régime sans collision, non-superfluide

Dans un gaz de Fermi dégénéré interagissant faiblement, les collisions élastiques sont bloquées par le principe d'exclusion de Pauli. En effet, les états finaux des processus de diffusions élastiques étant déjà occupés, la collision ne peut avoir lieu. Ce blocage de Pauli a des conséquences très importantes pour la dynamique d'un gaz de Fermi à deux composantes. En effet, les fermions oscillent indépendamment dans le potentiel de piège, par conséquent les effets des collisions élastiques et de la relaxation par collision sont faibles. Dans le cas non-dégénéré, l'influence des collisions entre les deux états de spin peut être très forte, ce qui est mis à profit dans le processus de refroidissement par évaporation utilisé expérimentalement [29]. Donc, dans le cas non dégénéré, le taux de collisions est grand alors que dans le cas dégénéré, il est faible car la plupart des collisions sont bloquées. Plus le taux de collisions est important, plus le temps de relaxation d'un mode collectif du gaz sera faible. Le temps de relaxation est donc un paramètre physique important pour la distinction entre les deux régimes. Enfin, nous verrons (Sec. 1.4.2) que dans le régime sans collision l'oscillation du gaz se fait à une fréquence double de celle du piège.

1.3.2 Le régime hydrodynamique

Quand un superfluide est formé à température suffisamment basse, le comportement hydrodynamique apparaît comme une propriété intrinsèque du système. Le gaz suit alors les équations de l'hydrodynamique superfluide. Dans un gaz de fermions interagissant fortement, des paires bosoniques peuvent se former et les interactions élastiques ne sont plus bloquées par le principe d'exclusion de Pauli. Ceci amène à un régime d'hydrodynamique classique dans un gaz dégénéré, où le gaz suit les mêmes équations que dans le cas superfluide. L'existence de collisions élastiques dans ce régime implique un temps de relaxation beaucoup plus faible que pour le régime sans collision. Par conséquent, la détermination du temps de relaxation par l'intermédiaire de l'amortissement du gaz permettra de déterminer la nature du régime ($\omega\tau \ll 1$ ou $\omega\tau \gg 1$). Enfin, comme le régime hydrodynamique, qui correspond à $\omega\tau \ll 1$, est toujours valable dans le cas superfluide, il n'est pas possible de conclure directement sur la nature superfluide du gaz en observant un comportement hydrodynamique [30].

1.4 Modes collectifs

1.4.1 Utilisation des modes collectifs

Un des objectifs des expériences de BEC-BCS crossover est de déterminer la transition entre la phase normale et la phase superfluide. Même si les fréquences des modes collectifs sont généralement différentes dans les régimes hydrodynamiques et sans collision, le comportement hydrodynamique du gaz n'est pas, comme on l'a dit dans la section précédente, un signe suffisant de superfluidité. En fait, il peut être soit une conséquence de la superfluidité soit d'un taux de collisions suffisamment élevé dans la phase du fluide normal. Il a donc été proposé de distinguer entre trois phases : superfluide, collisionnelle hydrodynamique et sans collision [31].

Les résultats expérimentaux suggèrent que la transition entre les phases superfluide et de fluide normal est accompagnée d'un très fort amortissement des modes collectifs. Les fréquences des modes collectifs dans la limite de température nulle peuvent être déterminées avec l'hydrodynamique superfluide, mais le cas à température finie est bien plus compliqué. Une première idée a été d'appliquer l'hydrodynamique à deux fluides de Landau [32], mais cela nécessitait que le taux de collisions dans la phase normale soit suffisamment important, *i.e.* bien plus grand que la fréquence du mode. Or ce n'est pas le cas, car dans un système piégé, les fréquences des modes collectifs sont au plus de l'ordre de la fréquence du piège. Dans la limite opposée, lorsque la composante normale du fluide est dans le régime sans collisions, ce qui devrait être le cas dans la limite de faible interaction, une théorie de transport qui couple l'hydrodynamique superfluide à l'équation de Vlasov pour la composante normale a été suggérée [33, 34, 35]. Bien que cette description donne une explication qualitative de l'amortissement des modes collectifs proche de la transition entre phase superfluide et phase normale, elle ne donne pas une description quantitative des expériences récentes car celles-ci sont toujours effectuées dans un régime de forte interaction $k_F|a| > 1$. Dans la phase normale, *i.e.* pour des températures au-dessus de la température critique T_C de la transition superfluide, les modes collectifs ont toujours un fort amortissement car les expériences ne sont ni dans le régime hydrodynamique, ni dans le régime sans collision. Ce régime intermédiaire est étudié théoriquement à l'aide de l'équation de Boltzmann et constitue le point de départ de cette thèse. Un des points importants a notamment été de déterminer les fréquences des modes collectifs à partir d'une description précise du gaz incluant les interactions et les effets de champ moyen dans l'équation de Boltzmann. Les résultats que nous verrons par la suite expliquent les écarts entre la fréquence théorique et les mesures expérimentales.

Dans la suite (Fig. 1.3), on considère une géométrie du piège en forme de cigare avec des fréquences de piège ω_x , ω_y et ω_z telles que $\omega_z \ll \omega_x, \omega_y$. Dans le cas d'une symétrie axiale, on notera la fréquence radiale $\omega_r = \omega_x = \omega_y$, tandis que ω_z sera la fréquence axiale du piège. Néanmoins, il existe aussi le cas du mode ciseaux où les fréquences radiales sont légèrement différentes $\omega_x \neq \omega_y$ pour "voir" l'oscillation de l'ellipse en regardant depuis la direction axiale.

1.4.2 Mode de compression quadrupolaire

Le mode quadrupolaire est aussi connu sous le nom de mode de respiration. Contrairement au mode quadrupolaire de surface et au mode ciseaux, un tel mode de compression est fortement influencé par l'équation d'état du système. Une étude détaillée de ce mode

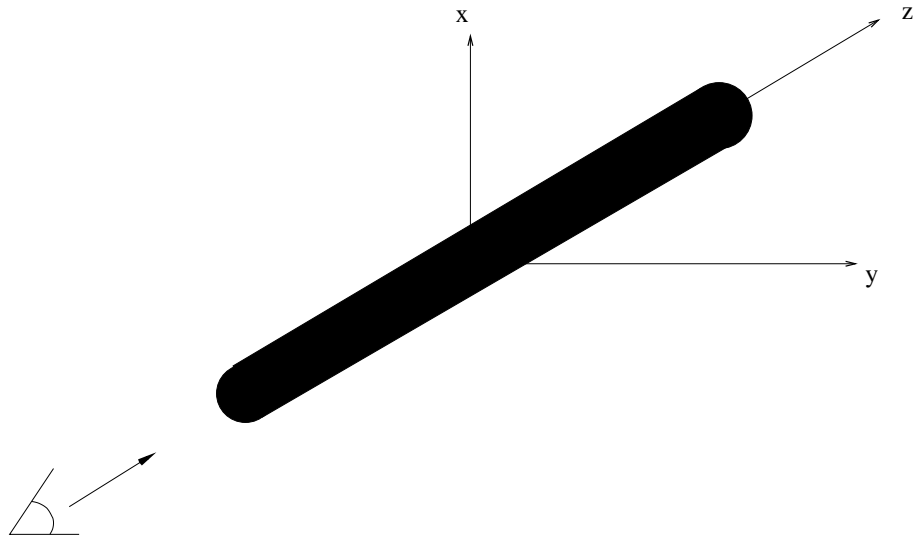


FIG. 1.3 – Représentation de la géométrie du gaz d’atomes piégés. La taille du nuage est bien plus grande selon l’axe z que selon les axes x et y . On observe toujours l’évolution selon l’axe z . Dans le cas du mode ciseaux, il existe aussi une légère asymétrie selon x et y pour observer l’oscillation d’une ellipse autour de l’axe z .

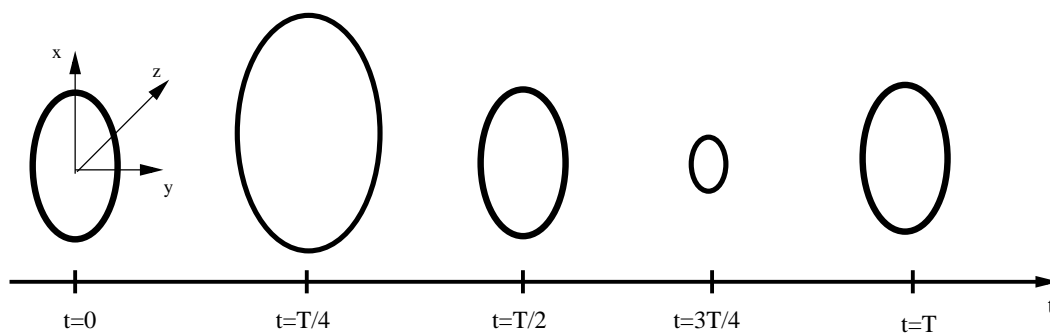


FIG. 1.4 – Représentation du mode de respiration au cours du temps avec une vision du mouvement selon la direction de l’axe z . Au cours d’une période, on observe un maximum puis un minimum de la dimension selon l’axe x du rayon du nuage d’atomes. Au cours d’une période, on observe une augmentation et une diminution du rayon du nuage d’atomes.

s'avère donc importante pour mieux comprendre la physique du système étudié.

Le mode de compression radiale consiste en une oscillation couplée en phase selon les axes x et y . Ainsi, le nuage de gaz décrit un mouvement périodique avec une diminution puis une augmentation du rayon du nuage (Fig. 1.4).

La fréquence de cette oscillation dépend du régime d'interaction du gaz et peut être directement calculée pour certains cas simples. Par exemple, dans la limite sans interaction d'un gaz sans collision, la fréquence ω_c du mode de compression radial est donnée par :

$$\omega_c = 2\omega_r. \quad (1.17)$$

En effet, le gaz a une oscillation découplée selon les différents degrés de liberté. Par conséquent, pour une particule, un aller correspond à un passage du maximum au maximum opposé du potentiel en passant par le minimum, le retour étant le trajet inverse. Pendant ce temps, le gaz aura eu une forme dilatée (maximum de potentiel) puis contractée (minimum de potentiel) puis un retour à l'état dilaté. Donc, pendant un aller-retour de la particule, le gaz aura subi deux mouvements de contraction-dilatation. La fréquence d'oscillation du gaz est donc double de celle du piège. Pour un gaz en régime hydrodynamique, ω_c dépend de l'équation d'état du système et par conséquent de l'indice polytropique γ de l'équation d'état (défini par $E = \rho^\gamma$). Dans le cas d'un condensat de Bose interagissant faiblement ($\gamma = 1$), on obtient $\omega_c = 2\omega_r$, tandis que la limite unitaire ($\gamma = 2/3$) donne $\omega_c = \sqrt{\frac{10}{3}}\omega_r$ [36]. Entre ces deux valeurs limites, il n'est pas possible d'obtenir directement la valeur de ω_c . Dans le régime d'un gaz de Fermi sans collision avec de faibles interactions, on verra que le rapport ω_c/ω_r se situe alors entre 2 et $\sqrt{\frac{10}{3}}$ (cf Sec. 3.7.3).

On peut comprendre pourquoi il n'est pas facile de déterminer cette valeur simplement : le régime d'un BEC interagissant fortement dépend de la valeur de l'indice polytropique γ , qui est difficile à calculer dans tout ce régime. Ce régime de forte interaction se situe plus près de la résonance que le régime BEC interagissant faiblement. Afin d'inclure la physique à N -corps, les interactions dans un BEC interagissant faiblement sont décrites par une approche de champ moyen. Cette approche n'est plus valide si l'interaction augmente fortement, il faut donc aller au-delà de cette description. De plus, l'influence des constituants fermioniques des molécules du BEC augmente quand on approche de la résonance. Tous ces effets affectent l'équation d'état, ce qui influence la fréquence du mode de compression. Il y a compétition entre deux effets : la forte interaction dans le gaz de Bose et l'apparition du comportement fermionique des constituants. Dans un gaz de Bose interagissant fortement, l'énergie moyenne par particule est augmentée par déplétion quantique. Cet effet au-delà du champ moyen corrige l'équation d'état de manière à réduire la compressibilité du gaz ; tandis que l'émergence du comportement fermionique conduit à une augmentation de cette compressibilité.

1.4.3 Mode de surface quadrupolaire

L'oscillation collective du mode de surface quadrupolaire est caractérisée par un mouvement périodique sans compression du gaz, ce qui rend ce mode de surface indépendant de l'équation d'état dans le régime hydrodynamique. C'est une différence significative avec le mode de compression. La fréquence de ce mode dépend fortement du régime collisionnel du gaz. Par conséquent, la fréquence du mode de surface ω_q est différente dans les régimes

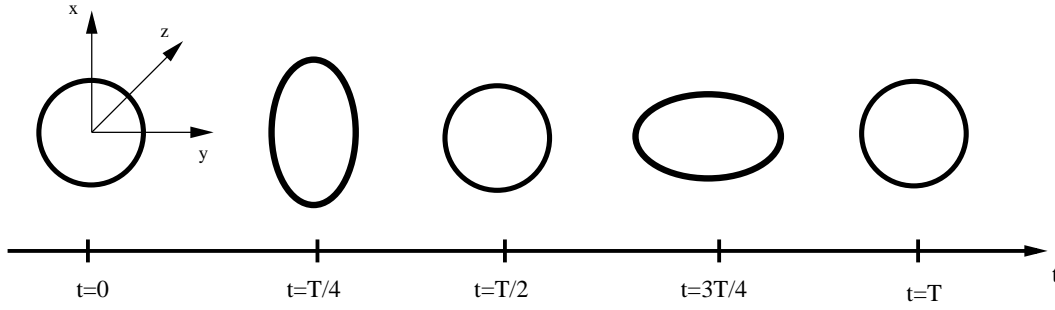


FIG. 1.5 – Représentation du mode quadrupolaire radial au cours du temps avec une vision du mouvement selon la direction de l'axe z . Les mouvements selon les axes x et y sont déphasés d'une demi période $T/2$.

hydrodynamique et sans collision. La phase d'oscillation après expansion peut aussi donner des informations sur le régime collisionnel par l'intermédiaire de l'amortissement.

Le mode de surface quadrupolaire consiste en des oscillations de la taille du nuage de gaz selon les axes x et y , avec un déphasage de π entre ces deux directions. Ainsi, à une taille maximale selon x (respectivement y) correspond une taille minimale selon y (resp. x) (Fig. 1.5). Pour un potentiel de piège harmonique, la fréquence de ce mode de surface en régime hydrodynamique est :

$$\omega_q = \sqrt{2}\omega_r. \quad (1.18)$$

Comme pour le mode de respiration, dans le régime sans collision, les atomes oscillent librement dans le piège. La fréquence du mode est donc :

$$\omega_q = 2\omega_r. \quad (1.19)$$

1.4.4 Mode ciseaux

De même que le mode quadrupolaire de surface décrit précédemment, le mode ciseaux est aussi un mode collectif de surface. Donc, la compressibilité et par conséquent l'équation d'état du gaz n'a pas d'effet sur l'oscillation du gaz dans le régime hydrodynamique. Pour exciter ce mode, il faut une géométrie anisotropique du piège : on considère donc toujours le cas d'un piège harmonique possédant la forme d'un cigare dont les fréquences ω_x , ω_y et ω_z vérifient $\omega_z \ll \omega_x, \omega_y$. Mais il est aussi nécessaire d'avoir une ellipticité dans le potentiel de piège entre les directions x et y . C'est la principale différence avec la géométrie pour les modes de surface et de compression. Le mode ciseaux est alors décrit par un mouvement de rotation périodique autour de l'axe z (Fig. 1.6). Comme pour le mode de surface quadrupolaire, les fréquences de ce mode dépendent des interactions du gaz. Dans le régime hydrodynamique, le temps de relaxation est petit et le gaz oscille collectivement avec une fréquence [37] :

$$\omega_{S,h} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}. \quad (1.20)$$

Dans le régime sans collision, les atomes ont une oscillation à deux fréquences données par [37] :

$$\omega_{S,c+} = |\omega_x + \omega_y| \quad \omega_{S,c-} = |\omega_x - \omega_y|. \quad (1.21)$$

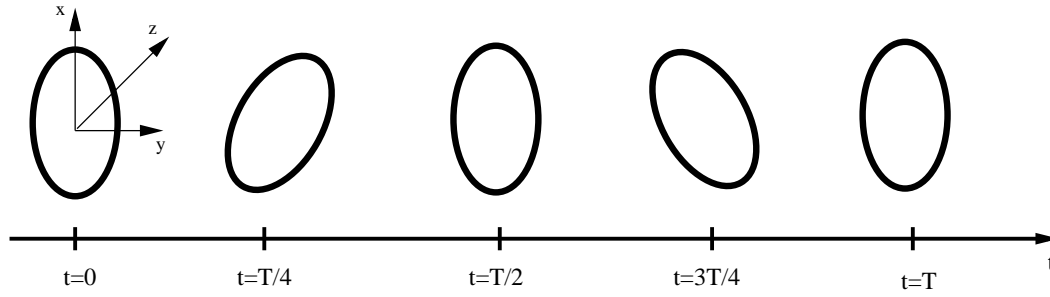


FIG. 1.6 – Représentation du mode ciseau au cours du temps avec une vision du mouvement selon la direction l'axe z . Au cours d'une période, on observe une oscillation de la surface du nuage d'atomes autour de l'axe z . La forme elliptique de la surface est ici une conséquence des différentes valeurs des fréquences : $\omega_x \neq \omega_y$.

Quand le régime sans collision est modifié, la plus grande fréquence $\omega_{S,c+}$ est adiabaticquement connectée à la fréquence hydrodynamique, tandis que la fréquence la plus basse $\omega_{S,c-}$ est absente dans la limite hydrodynamique. En pratique, les deux fréquences sont donc possibles pour ce mode ciseaux, néanmoins seule la fréquence $\omega_{S,c+}$ est observée expérimentalement. En effet, dans le régime hydrodynamique, les données sont interpolées par une seule fonction sinusoïdale amortie, tandis que dans le régime sans collision, on interpole la somme de deux fonctions sinusoïdales amorties avec chacune leurs propres paramètres libres.

1.5 Cadre d'étude

Dans cette section, on présente quelques éléments théoriques nécessaire pour l'étude des gaz d'atomes froids et plus particulièrement les modes collectifs *via* l'équation de Boltzmann. On expose notamment la théorie de la diffusion nécessaire pour l'obtention de la section efficace de collision, les résonances de Feshbach, outil fondamental des pièges d'atomes froids et l'approximation d'échelle utilisée dans notre modèle de champ moyen.

1.5.1 Théorie de la diffusion

La dynamique collisionnelle de deux atomes de masse m est généralement décrite en considérant la diffusion d'une particule de masse réduite $m_r = m/2$ dans un potentiel $V(\mathbf{r})$. Pour des atomes neutres dans l'état fondamental, le potentiel d'interaction est à symétrie sphérique : $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Si on écrit l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\left\{ \frac{p^2}{2m_r} + V(r) \right\} \Psi_k(r) = E_k \Psi_k(r) \quad (1.22)$$

pour la particule relative de masse m_r et d'énergie $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m_r$, la solution asymptotique est alors la superposition d'une onde plane incidente et d'une fonction d'onde diffusée :

$$\Psi_k(r) \sim e^{ikz} + f(k, \theta) \frac{e^{ikz}}{r} \quad (1.23)$$

avec k le nombre d'onde relatif des particules en collision. L'amplitude de diffusion $f(k, \theta)$ dépend uniquement de l'énergie des particules en collision *via* k et de l'angle de diffusion θ ,

défini comme l'angle entre les moments relatifs avant et après le processus de collision. A partir de l'amplitude de diffusion, on peut définir la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta)|^2. \quad (1.24)$$

Les atomes étant identiques, la partie orbitale de la fonction d'onde doit être symétrique ou antisymétrique selon que le spin total des deux particules est respectivement pair ou impair.

Afin de tirer avantage de la symétrie du problème, les fonctions d'onde incidente et diffusée peuvent être développées en terme de polynôme de Legendre. Ce développement en ondes partielles conduit à une équation de Schrödinger unidimensionnelle pour la fonction d'onde radiale dans un potentiel

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_r r^2} + V(r). \quad (1.25)$$

Pour la fonction d'onde partielle avec $l = 0$, le potentiel $V_{eff}(r)$ est simplement le potentiel interatomique $V(r)$. Dans le cas $l \neq 0$, il existe une barrière centrifuge supplémentaire. Pour une onde partielle l , la section efficace est alors [38] :

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) \quad (1.26)$$

où $\delta_l(k)$ est le déphasage, qui, dans la limite $k \rightarrow 0$ se comporte comme $\delta_l(k) \propto k^{2l+1}$. Ainsi, dans la limite des basses énergies, la section efficace des ondes partielles avec $l \neq 0$ tend vers zéro si k tend vers zéro. Pour les basses énergies, l'onde partielle avec $l = 0$ est la seule à contribuer à la section efficace totale. Ce régime est appelé la limite d'onde s et est caractérisé par une amplitude de diffusion isotropique. La section efficace de diffusion est alors donnée par [39] :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_{l=0}(k) = 4\pi a^2 \quad (1.27)$$

où la longueur de diffusion est définie par

$$a = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0(k)}{k} \equiv \frac{1}{\kappa}. \quad (1.28)$$

Le signe dans la définition de la longueur de diffusion est choisi afin que la longueur de diffusion d'une sphère de rayon R soit $+R$. L'étude qualitative des fonctions d'onde montre que l'on a $a > 0$ pour tout potentiel répulsif. Pour un potentiel attractif, la situation est plus complexe à cause de l'existence d'état lié. Une longueur de diffusion grande et positive signale la présence d'un état lié [38].

On peut comprendre qualitativement que les ondes partielles ($l > 0$) n'interviennent pas pour des températures suffisamment basses. En effet, si $l \neq 0$, les atomes en interaction subissent une barrière centrifuge proportionnelle à l en plus du potentiel atomique. Dans le cas du ${}^6\text{Li}$, la barrière pour $l = 1$ est de l'ordre de $k_B \times 7$ mK [40]. Pour des énergies d'interaction suffisamment basses, les atomes sont réfléchis sur la barrière de potentiel et ne s'approchent pas suffisamment pour interagir *via* le potentiel $V(r)$. La section efficace totale est donnée par la somme sur toutes les contributions des différentes ondes partielles : $\sigma(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l(k)$.

Dans les expériences que nous avons étudiées au cours de cette thèse, les températures sont largement en-dessous de 1mK. Par conséquent, on ne considérera que les interactions

d'ondes s . Cette considération, largement justifiée, permet de simplifier significativement le problème que l'on considère, la principale conséquence étant une isotropie de la section efficace de collision entre les atomes de spins différents.

Concernant les propriétés spécifiques de diffusion d'un gaz fermionique ultra-froid, les expériences comportent $N = 10^6$ particules dans un cube de $100\mu\text{m}$ de côté, soit une densité de $\rho = \frac{N}{V} = 10^{18} \text{ m}^{-3} = 10^{12} \text{ at.cm}^{-3}$. La distance interparticule moyenne est alors $\rho^{-1/3} \simeq 10^{-6}\text{m}$. La portée du potentiel interatomique étant de l'ordre de 10^{-9}m , on peut par conséquent considérer que le processus de diffusion dominant est l'interaction à deux corps et utiliser l'expression asymptotique pour la fonction d'onde de l'état diffusé.

Pour un gaz dilué dans la limite d'onde s , on peut montrer que les propriétés macroscopiques du gaz dépendent seulement de la longueur de diffusion des ondes s et pas de la forme particulière du potentiel d'interaction à deux corps. Ceci permet d'avoir un formalisme à N -corps où le potentiel microscopique est remplacé par un potentiel effectif de courte portée qui reproduit correctement la longueur de diffusion, l'interaction à deux corps la plus simple étant l'interaction de contact (Sec. 1.5.3). Dans ce cas, la relation entre l'amplitude de diffusion de l'onde s et la longueur de diffusion a est [39] :

$$f(k) = -\frac{a}{1 + ika}, \quad (1.29)$$

avec k le nombre d'onde relatif des deux particules. La section efficace totale pour les collisions élastiques de particules non-identiques devient alors :

$$\sigma(k) = \frac{4\pi a^2}{1 + k^2 a^2}. \quad (1.30)$$

On utilisera ce résultat par la suite pour simuler une section efficace dans le vide.

1.5.2 Les résonances de Feshbach

L'origine physique et les propriétés élémentaires d'une résonance de Feshbach peuvent être comprises simplement de la manière suivante. On considère deux courbes de potentiel moléculaire $V_{bg}(r)$ et $V_c(r)$ (Fig. 1.7). Pour une distance interatomique r grande, le potentiel de fond $V_{bg}(r)$ relie asymptotiquement deux atomes libres dans le gaz de fermions froid. Dans une collision avec une très faible énergie E , ce potentiel représente le canal ouvert. L'autre potentiel $V_c(r)$, représentant le canal fermé, peut supporter des états liés de molécule près du seuil du canal ouvert. Dans notre cas, le canal fermé décrit l'interaction entre atomes dans un état de spins différent de celui considéré dans le canal de diffusion.

La résonance de Feshbach a lieu quand l'état lié moléculaire dans le canal fermé approche énergétiquement l'état de diffusion dans le canal ouvert. Le couplage même faible peut mener à un important mélange entre les deux canaux. La différence en énergie peut être contrôlée *via* un champ magnétique quand les moments magnétiques correspondants sont différents. Ceci mène à une résonance de Feshbach contrôlée magnétiquement. Le couplage résonnant peut être effectué par une méthode optique, on parle alors de résonance de Feshbach optique.

Une résonance de Feshbach contrôlée magnétiquement peut être décrite par une expression simple pour la longueur de diffusion d'onde s a en fonction du champ magnétique B (Fig. 1.8) :

$$a = a_{bg} \left(1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right). \quad (1.31)$$

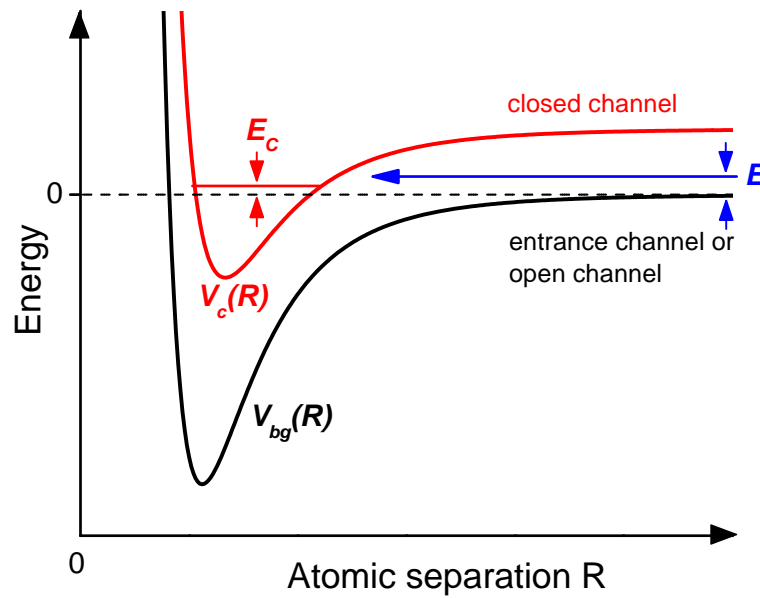


FIG. 1.7 – Représentation du potentiel énergétique en fonction de la distance interatomique. Le canal ouvert V_{bg} correspond à deux atomes libres, tandis que le canal fermé V_c possède un état lié de molécule. Les moments magnétiques correspondants à ces deux niveaux d'énergie sont différents, on peut donc réaliser une translation d'un potentiel par rapport à l'autre en modifiant le champ magnétique externe. La résonance de Feshbach a lieu lorsque le niveau d'énergie de l'état lié E_c correspond à l'énergie de l'état de diffusion du canal ouvert. Courbe extraite de [41].

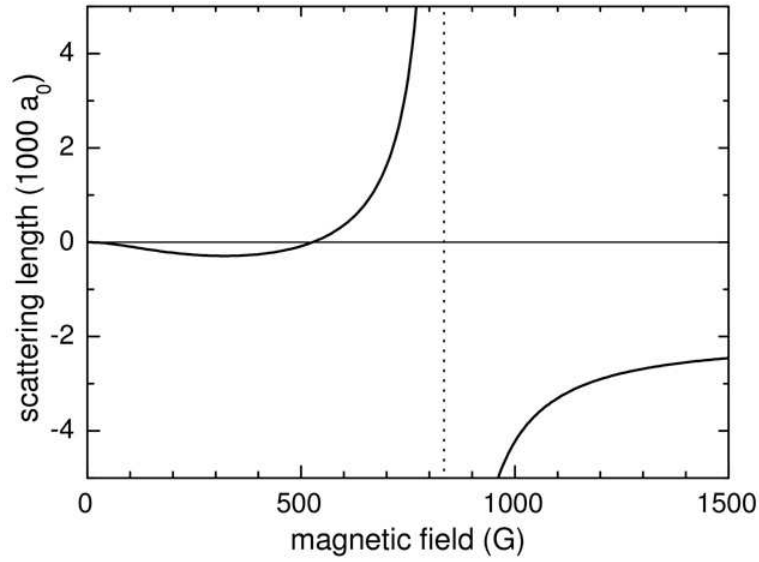


FIG. 1.8 – Longueur de diffusion de l'onde s en fonction du champ magnétique B . On voit une divergence pour un champ magnétique $B_0 = 834\text{G}$ et un changement de signe de la longueur de diffusion a qui est positive (côté BEC) pour les champs magnétiques faibles et négative (côté BCS) pour les champs magnétiques supérieurs au dessus de la résonance. $a_0 = 0.0529\text{nm}$ est le rayon de Bohr. Courbe extraite de [29].

avec par exemple dans le cas du ${}^6\text{Li}$: $a_{bg} = -1405a_0$, $a_0 = 0,0529177\text{nm}$ le rayon de Bohr, $\Delta B = 300\text{G}$ la largeur de la résonance et $B_0 = 834,15\text{ G}$ la valeur du champ magnétique à l'unitarité [29]. La longueur d'onde a_{bg} est la longueur d'onde associée au potentiel $V_{bg}(r)$ et représente la valeur sans résonance. Elle est directement reliée au niveau d'énergie du dernier état lié vibrationnel de $V_{bg}(r)$. Le paramètre B_0 représente la position de la résonance, où la longueur de diffusion diverge ($a \rightarrow \pm\infty$), et Δ est la largeur de résonance. Remarquons que a_{bg} et Δ peuvent être positif ou négatif.

1.5.3 L'interaction à deux corps

Afin de décrire l'interaction entre deux particules, il faut se rappeler les ordres de grandeur des différentes expériences étudiées au cours de cette thèse. On considère en effet des atomes de ${}^6\text{Li}$ qui interagissent à très courte portée ($d \simeq 10^{-1}\text{ nm}$) et comme nous l'avons vu précédemment (Sec. 1.5.1), la densité moyenne est $\rho \simeq 10^{12}\text{ cm}^{-3}$ donc la distance moyenne entre particules est $l \simeq 1\mu\text{m}$. Comme $d \ll l$, une particule ne ressent par conséquent pas l'interaction produite par les autres particules. On modélise donc cette interaction par une interaction de contact $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, l'effet des autres particules n'étant ressenti que lorsqu'il y a contact.

Dans le formalisme de la seconde quantification, on va montrer que pour un tel potentiel $v(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, il n'existe pas d'interaction entre particules de même spin. Pour cela, on écrit le hamiltonien du système :

$$H = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right\} \Psi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{SS'} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_S^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{S'}^\dagger(\mathbf{r}') \Psi_{S'}(\mathbf{r}') \Psi_S(\mathbf{r}) v(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.32)$$

On peut alors réécrire le terme d'interaction du hamiltonien :

$$\begin{aligned}
H_{int} &= \frac{g}{2} \sum_{SS'} \int d\mathbf{r} \Psi_S^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{S'}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{S'}(\mathbf{r}) \Psi_S(\mathbf{r}) \\
&= \frac{g}{2} \sum_{SS'} \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} \left(\Psi_S^\dagger \Psi_{S'}^\dagger - \Psi_{S'}^\dagger \Psi_S^\dagger \right) \frac{1}{2} (\Psi_{S'} \Psi_S - \Psi_S \Psi_{S'}) \\
&= \frac{g}{2} \sum_S \int d\mathbf{r} \Psi_S^\dagger \Psi_{-S}^\dagger \Psi_{-S} \Psi_S \\
&= \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \left(\Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow + \Psi_\downarrow^\dagger \Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\uparrow \Psi_\downarrow \right) \\
&= g \int d\mathbf{r} \Psi_\uparrow^\dagger \Psi_\downarrow^\dagger \Psi_\downarrow \Psi_\uparrow
\end{aligned} \tag{1.33}$$

où l'on a utilisé l'anticommutation des fermions ($\Psi_S^\dagger \Psi_{S'}^\dagger = -\Psi_{S'}^\dagger \Psi_S^\dagger$) et remarqué que le terme sous la somme discrète, dans la deuxième ligne, est nul si $S = S'$, ce qui impose $S \neq S'$. On retrouve ici un résultat qui n'est qu'une conséquence du principe de Pauli : on ne peut pas créer deux particules de même spin au même endroit.

1.5.4 Approximation d'échelle

Le formalisme que nous allons utiliser au cours de cette thèse est celui de la théorie des champs à température finie. Au cours d'un processus de diffusion quelconque, l'état final et l'état initial d'un système sont reliés par la matrice S . Les différents processus ayant lieu peuvent simplement conduire à une modification de l'énergie et du moment de la particule mais aussi à un processus de création-annihilation pour lequel on aurait un nombre différent de particules entre l'état initial et l'état final. Afin de traiter ces différents processus, on les classe suivant une série perturbative qui correspond à une série de puissance du paramètre d'interaction g .

Donc, au premier ordre d'approximation, on doit avoir le terme de Hartree correspondant à l'interaction de type particule-particule et le terme de Fock ou terme d'échange. Or, dans le cadre de notre étude, on remarque que ce second terme est nul car l'interaction a lieu entre atomes de spins opposés. En effet, le système est décrit par des interactions de courte portée et le principe de Pauli exclut la possibilité d'avoir des particules de même spin au même endroit à un instant donné. En d'autres termes, la fonction de corrélation spin-spin $\langle \rho_\uparrow(\mathbf{r}) \rho_\downarrow(\mathbf{r}) \rangle$ est nulle. Par conséquent, il ne peut pas y avoir d'interaction entre particules de même spin, le terme d'échange est nul et on ne considérera donc que le terme de Hartree.

Une autre manière de voir le processus revient à considérer l'équation de Dyson

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(k, \omega_n) &= \mathcal{G}^0(k, \omega_n) + \mathcal{G}^0(k, \omega_n) \Sigma^*(k, \omega_n) \mathcal{G}(k, \omega_n) \\
\text{donc } \mathcal{G}(k, \omega_n) &= [\mathcal{G}^0(k, \omega_n)^{-1} - \Sigma^*(k, \omega_n)]^{-1}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

qui relie la fonction de Green complète \mathcal{G} , la fonction de Green "nue" \mathcal{G}^0 et la self-énergie Σ^* qui contient la description des effets de milieu. Contrairement au traitement perturbatif qui classe les termes suivant les différentes puissances de l'interaction g , cette équation regroupe les termes en diagramme de différentes classes. Dans notre cas, l'interaction étant de courte portée, on privilégie les diagrammes de type particule-particule représentés schématiquement

par des diagrammes en "échelle". Ainsi, on néglige les termes dits d'échange pour les faibles puissances de g mais on resomme toutes les contributions de type échelle pour le calcul de la matrice T . C'est pour cela que l'on considérera par la suite le calcul de la matrice T dans l'approximation d'échelle.

Chapitre 2

L'interaction effective dans le milieu

Dans cette section, on développe le modèle utilisé pour déterminer les caractéristiques d'un mode collectif (fréquence, amortissement). Cette étude correspond à un modèle au-delà de l'approximation de Hartree fréquemment utilisée pour rendre compte des effets de champ moyen. On commencera donc par montrer les limites de cette approximation puis on développera l'approximation de la matrice T non autocohérente. Nous déterminerons dans ce cadre des quantités physiques telles que la section efficace et la densité dont nous verrons différentes approximations. Enfin, le travail décrit ci-dessous a fait l'objet d'une publication [19].

2.1 L'approximation de Hartree

On considère un gaz de fermions uniforme à deux composantes (\uparrow, \downarrow). Tant que la portée de l'interaction est petite par rapport à la distance moyenne entre les particules, on peut modéliser l'interaction entre atomes de spins opposés par une interaction de portée nulle (Sec. 1.5.3). L'hamiltonien du système, s'écrit alors en seconde quantification ¹ :

$$H = \int d\mathbf{r} \left[-\psi^\dagger \frac{\nabla^2}{2m} \psi + g \psi_\downarrow^\dagger \psi_\uparrow^\dagger \psi_\uparrow \psi_\downarrow \right], \quad (2.1)$$

où m , g et Ψ sont la masse de l'atome, la constante de couplage et l'opérateur de champ fermionique. La constante de couplage est reliée à la longueur de diffusion a par la relation :

$$g = \frac{4\pi a}{m}. \quad (2.2)$$

De plus, l'interaction étant attractive, on a $g < 0$. Dans l'approximation de Hartree, les énergies à une particule des composantes \uparrow et \downarrow sont décalées respectivement de : $U_{H\uparrow} = g\rho_\downarrow$ et $U_{H\downarrow} = g\rho_\uparrow$. Le terme de Fock ou d'échange s'annule car l'interaction est uniquement entre atomes de spins opposés. Nous considérerons que les deux états de spins sont également peuplés, et l'on notera $\rho = \rho_\uparrow = \rho_\downarrow$ la densité par état de spin. Le décalage de Hartree est alors le même pour les deux composantes et on l'écrira :

$$U_H = g\rho. \quad (2.3)$$

¹Désormais, on se place dans le système $\hbar = c = k_B = 1$. De plus, la plupart des variables physiques sont exprimés dans les unités de l'oscillateur harmonique où l'on a $m = \omega = 1$, néanmoins pour plus de clarté on fera souvent apparaître ces dernières variables.

Pour ce modèle, on va calculer la densité en fonction du potentiel chimique μ . Il est suffisant ici de considérer la limite de température nulle, donc telle que $T \ll \epsilon_F$, où

$$\epsilon_F = \frac{k_F^2}{2m} \quad \text{et} \quad k_F = (6\pi^2\rho)^{1/3} \quad (2.4)$$

sont respectivement l'énergie et le moment de Fermi. Ces équations qui définissent ϵ_F et k_F restent valides même si le nombre d'occupation ne ressemble plus à une fonction de Heaviside à cause de la température et des effets de corrélation. A température nulle, la relation entre ϵ_F et $\mu(T=0)$ est donnée par $\epsilon_F = \mu - U_H$. En remplaçant ϵ_F et U_H par leur définition, nous verrons (Sec 2.4.2) que l'on obtient l'équation cubique suivante pour k_F :

$$-\frac{2ak_F^3}{3\pi m} - \frac{k_F^2}{2m} + \mu = 0. \quad (2.5)$$

Cette équation n'a pas de solution si μ dépasse une valeur critique $\mu_{max} = \pi^2/(24ma^2)$ soit une densité $\rho_{max} = \pi/(48|a|^3)$ correspondant à $k_F|a| = \pi/2$. La même valeur a déjà été trouvée [42] et correspond à la densité où le système devient instable pour la séparation des phases entre basse densité (gaz) et haute densité (solide). L'origine de cette instabilité dans l'approximation de Hartree provient d'une énergie d'interaction $g\rho^2/2$ plus importante à haute densité que l'énergie cinétique qui varie comme $\rho^{5/3}$. Ainsi, si cette approximation était correcte, un gaz de Fermi à basse température avec une interaction attractive devrait être instable dès que $k_F|a| > \pi/2$. Or, l'expérience prouve que les gaz de fermions froids sont stables pour des valeurs de $k_F|a|$ bien plus importantes et même à l'unitarité car le système préfère former des paires plutôt que de se séparer en deux phases [43]. On en conclut donc que l'instabilité n'est pas physique et n'est qu'un artefact de l'approximation de Hartree.

2.2 La matrice T

Dans l'approximation de Hartree, vue au cours de la section précédente, la constante de couplage g était reliée à la longueur de diffusion dans le vide. Ceci signifie que nous considérons implicitement que l'amplitude de diffusion était la même dans le gaz que dans le vide. Comme nous le verrons, cette hypothèse est à l'origine de l'instabilité non-physique de l'approximation de Hartree à forte densité. En réalité, l'amplitude de diffusion devient proportionnelle à $1/k_F$ au lieu de a à haute densité [44]. Les énergies d'interaction et cinétique croissent alors toutes les deux comme $\rho^{5/3}$ et il est possible d'éviter cette instabilité.

2.2.1 Dans le vide

Le schéma d'approximation que nous adoptons ici, afin de calculer l'amplitude de diffusion dans le milieu, est basée sur l'approximation de la matrice T qui satisfait l'équation de Lippmann-Schwinger [45] représentée diagrammatiquement (Fig. 2.1) :

$$\begin{aligned} i\Gamma(E, \mathbf{k}, \omega, \mathbf{q}, \omega', \mathbf{q}') &= ig \\ &+ ig \int \frac{d\mathbf{q}''}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega''}{(2\pi)} \frac{i\Gamma(E, \mathbf{k}, \omega'', \mathbf{q}'', \omega', \mathbf{q}')}{\left[\frac{E}{2} + \omega'' - \frac{(\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}'')^2}{2m} + i\epsilon \right] \left[\frac{E}{2} - \omega'' - \frac{(\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}'')^2}{2m} + i\epsilon \right]} \end{aligned} \quad (2.6)$$

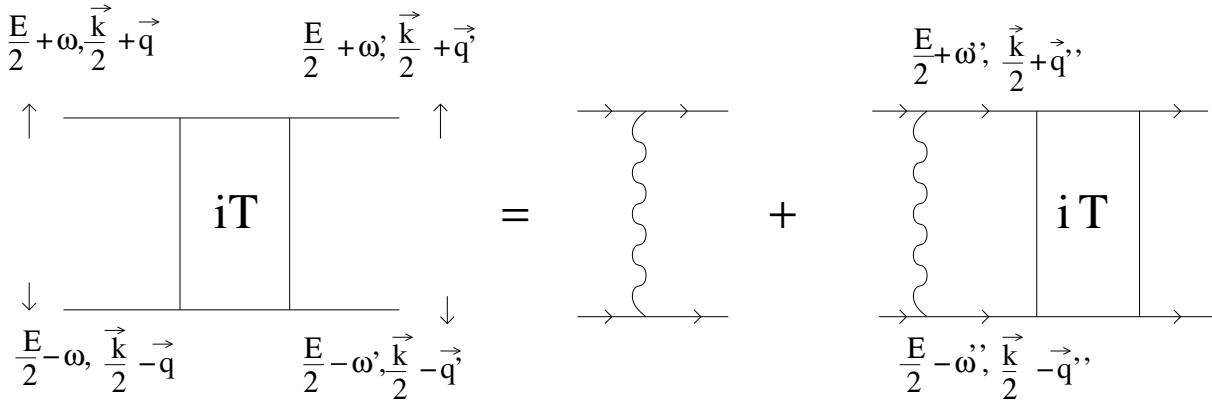


FIG. 2.1 – Représentation diagrammatique de l'équation de Lippmann-Schwinger.

où Γ représente l'amplitude de diffusion. Le membre de droite de cette équation est indépendant de ω et \mathbf{q} (g étant une constante), donc l'amplitude de diffusion Γ n'en dépend pas non plus. Il en est de même pour ω' et \mathbf{q}' . La matrice T ne dépend donc que de l'énergie totale E et du moment total \mathbf{k} des deux atomes. On pose :

$$j_0(E, \mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{q}''}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega''}{(2\pi)} \frac{1}{\left[\frac{E}{2} + \omega'' - \frac{(\mathbf{k}/2 + \mathbf{q}'')^2}{2m} + i\epsilon \right] \left[\frac{E}{2} - \omega'' - \frac{(\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}'')^2}{2m} + i\epsilon \right]} \quad (2.7)$$

où j_0 représente la fonction de Green libre à deux particules. L'amplitude de diffusion est alors donnée par la relation :

$$\Gamma(E, \mathbf{k}) = \frac{g}{1 - g j_0(E, \mathbf{k})}. \quad (2.8)$$

Le problème dans ces équations est que j_0 est divergent. Afin de résoudre ce problème, on peut introduire un cut-off Λ , déterminer la constante de couplage g en fonction de Λ telle que l'on retrouve la longueur de diffusion dans le vide et enfin prendre la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ en conservant a constant [46]. De manière explicite, on part du cas simple $\Gamma(0, \mathbf{0})$:

$$\begin{aligned} j_0(0, \mathbf{0}, \Lambda) &= \int_{|\mathbf{q}| \leq \Lambda} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{(2\pi)} \frac{1}{\left(\omega - \frac{q^2}{2m} + i\epsilon \right) \left(-\omega - \frac{q^2}{2m} + i\epsilon \right)} \\ &= \int_0^\Lambda \frac{4\pi q^2 dq}{(2\pi)^3} \frac{1}{-\frac{q^2}{m} + i\epsilon} \\ &= -\frac{m}{2\pi^2} \Lambda. \end{aligned}$$

On en déduit directement $\Gamma(0, \mathbf{0}, \Lambda) = \frac{g}{1 + \frac{gm}{2\pi^2} \Lambda}$. Cette valeur représentant la constante nue $\frac{4\pi a}{m}$, on peut directement obtenir une relation avec la longueur de diffusion a :

$$g = \frac{4\pi}{m} \frac{a}{1 - \frac{2}{\pi} \Lambda a}. \quad (2.9)$$

Maintenant que l'on connaît la relation entre g , a et Λ , on considère le cas général :

$$j_0(\omega, \mathbf{k}, \Lambda) = \int_0^\Lambda \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega - \left[\frac{(\mathbf{k}/2 + \mathbf{q})^2}{2m} + \frac{(\mathbf{k}/2 - \mathbf{q})^2}{2m} \right] + i\epsilon}. \quad (2.10)$$

Ce qui donne, avec $q_{cm} = \sqrt{mE_{cm}}$ le moment sur couche de masse dans le référentiel du centre de masse et $E_{cm} = \omega - \frac{k^2}{4m}$:

$$j_0(\omega, \mathbf{k}, \Lambda) = \frac{m}{2\pi^2} \left[-\Lambda + \frac{q_{cm}^2}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) - i\frac{\pi}{2}q_{cm} \right].$$

En exprimant g en fonction de Λ et a , on obtient :

$$\Gamma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi}{m} \frac{a}{1 - \frac{2a}{\pi} \frac{q_{cm}^2}{\Lambda} + iaq_{cm}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{4\pi}{m} \frac{a}{1 + iaq_{cm}}. \quad (2.11)$$

Néanmoins, on remarque ici qu'il est difficile de "contrôler" les limites : il n'est pas facile de prendre simultanément les limites $\Lambda \rightarrow \infty$ et $g \rightarrow 0$.

Une autre méthode permet de s'affranchir de ce problème de limites. Si on considère la quantité $J(\omega, \mathbf{k}) = \Gamma^{-1}(0, \mathbf{0}) - \Gamma^{-1}(\omega, \mathbf{k})$; on a alors à partir de l'équation Eqs. (2.8) :

$$\Gamma^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{g} - J(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.12)$$

On obtient ainsi,

$$J(\omega, \mathbf{k}) = j_0(\omega, \mathbf{k}) - j_0(0, \mathbf{0}) \quad (2.13)$$

ce qui revient toujours à considérer le propagateur à deux particules mais cette fois en ayant soustrait la contribution constante. Donc, J ne dépend pas de g et on prend directement la limite $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$J_0(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left[\frac{m}{q_{cm}^2 - q^2} - \frac{m}{-q^2} \right] = -i\frac{m}{4\pi}q_{cm}, \quad (2.14)$$

ce qui redonne le même résultat pour Γ que précédemment.

2.2.2 Effets de milieu

Dans le cadre de notre étude, on veut prendre en compte les effets de statistique quantique : il faut donc ajouter le blocage de Pauli. La fonction de Green à deux particules, dans le formalisme du temps imaginaire (Matsubara), vaut :

$$J(i\omega_N, \mathbf{k}) = -T \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_{n \text{ impair}} \mathcal{G}_0(\omega_n, \mathbf{k}/2 - \mathbf{q}) \mathcal{G}_0(\omega_N - \omega_n, \mathbf{k}/2 + \mathbf{q}), \quad (2.15)$$

où $\omega_N = 2\pi NT$ et $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ sont, respectivement, les fréquences de Matsubara bosoniques et fermioniques, et $\mathcal{G}_0(\omega_n, \mathbf{k}) = 1/(i\omega_n - \xi_{\mathbf{k}}^0)$ est la fonction de Green libre, $\xi_{\mathbf{k}}^0 = k^2/(2m) - \mu$ l'énergie d'une particule libre. Après avoir évalué la somme sur n , la fonction retardée $J(\omega, \mathbf{k})$ est obtenue par prolongement analytique pour une valeur de ω qui n'est pas une fréquence de Matsubara. Donc, pour une énergie réelle, on obtient un propagateur retardé si $i\omega_n \rightarrow \omega + i\epsilon$ (voir [47]). Le résultat est :

$$J(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1 - n_{\mathbf{k}/2+\mathbf{q}}^0 - n_{\mathbf{k}/2-\mathbf{q}}^0}{\omega - \xi_{\mathbf{k}/2+\mathbf{q}}^0 - \xi_{\mathbf{k}/2-\mathbf{q}}^0 + i\epsilon}, \quad (2.16)$$

avec $n_{\mathbf{k}}^0 = 1/[\exp(\xi_{\mathbf{k}}^0/T) + 1]$. On décompose $J = J_0 + \tilde{J}$ en une fonction de Green à deux particules dans l'espace libre J_0 et une correction due au milieu \tilde{J} . On peut alors écrire :

$$\Gamma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi a}{m} \frac{1}{1 + iaq_{cm} - \frac{4\pi a}{m} \tilde{J}}, \quad (2.17)$$

avec cette fois $q_{cm} = \sqrt{m(\omega + 2\mu) - k^2/4}$. Même sans cut-off, la contribution du milieu \tilde{J} est finie et donnée par :

$$\tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = - \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{n_{\mathbf{k}/2+\mathbf{q}}^0 + n_{\mathbf{k}/2-\mathbf{q}}^0}{\omega - \xi_{\mathbf{k}/2+\mathbf{q}}^0 - \xi_{\mathbf{k}/2-\mathbf{q}}^0 + i\epsilon}. \quad (2.18)$$

On calcule la partie imaginaire de \tilde{J} :

$$\text{Im } \tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{m^2 T}{2\pi k} \ln \left(\frac{1 + e^{-\xi_-^0/T}}{1 + e^{-\xi_+^0/T}} \right), \quad (2.19)$$

avec $\xi_{\pm}^0 = (k/2 \pm q_{cm})^2/(2m) - \mu$. La partie réelle sera déterminée numériquement *via* la relation de dispersion :

$$\text{Re } \tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = -\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im } \tilde{J}(\omega', \mathbf{k})}{\omega - \omega'}. \quad (2.20)$$

La détermination de $\text{Im } \tilde{J}(\omega, \mathbf{k})$ et $\text{Re } \tilde{J}(\omega, \mathbf{k})$ est une étape importante de notre travail. En effet, à partir de ces relations numériques, on connaît $\tilde{J}(\omega, \mathbf{k})$ qui est l'élément principal dans le calcul de la matrice T 2.17. Nous verrons que la connaissance de cette grandeur est essentielle pour l'inclusion des effets de milieu dans la section efficace. Ces résultats sont aussi utilisés dans le calcul de la self-énergie Σ qui nous permettra de déterminer le champ moyen.

2.3 La self-énergie Σ

Contrairement à l'interaction de portée nulle utilisée précédemment, la fonction Γ dans le milieu dépend des moments et de l'énergie. Ceci complique le calcul du décalage en énergie des particules. Le concept même de décalage en énergie doit être posé s'il n'y a pas de quasiparticule bien définie, comme c'est le cas dans le régime de pseudogap [48]. L'outil approprié à calculer est la self-énergie Σ . Dans l'approximation de resommation en échelle, celle-ci s'écrit dans le formalisme de Matsubara :

$$\Sigma(i\omega_n, \mathbf{k}) = - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{n' \text{ impair}} \mathcal{G}_0(\omega_{n'}, \mathbf{k}) \Gamma(i\omega_n + i\omega_{n'}, \mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (2.21)$$

Il existe un pôle si $T < T_C$ car notre théorie ne tient pas compte de l'appariement. On doit donc se placer au-dessus de la transition de phase BCS : $T > T_C$. La relation entre le propagateur retardé et le propagateur de Matsubara est donnée par :

$$\Gamma_M(\omega_N, \mathbf{k}) = \Gamma_R(i\omega_N, \mathbf{k}). \quad (2.22)$$

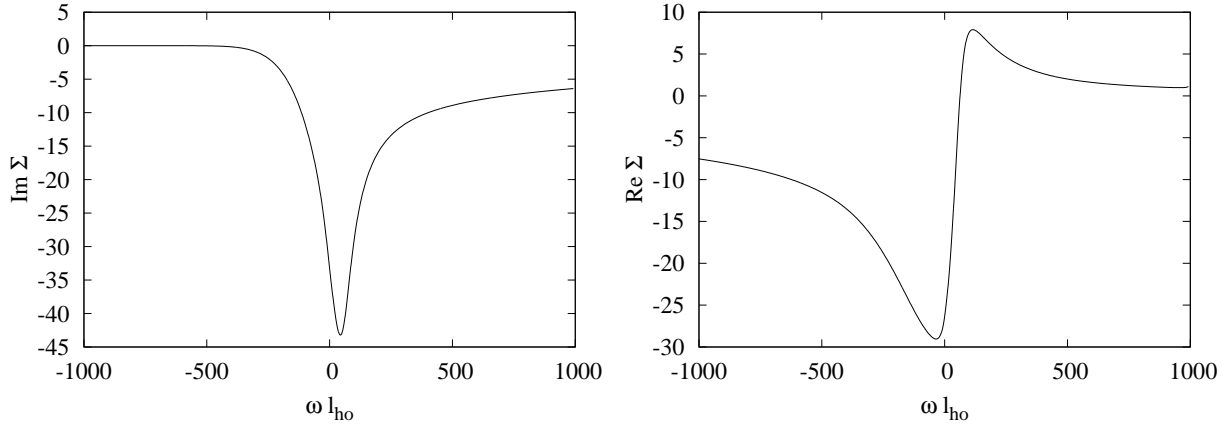


FIG. 2.2 – Sur la figure de gauche, on représente en fonction de l'énergie et pour un moment $k = 0$, la partie imaginaire de la self-énergie pour $1/k_F a = -0.18$, $T/T_c = 2.46$ et $T/T_F = 0.4$, calculée à l'aide de l'approximation de la matrice T . Sur la figure de droite, on représente, pour les mêmes paramètres, la partie réelle de la self-énergie obtenue par la relation de dispersion. La longueur unité est celle de l'oscillateur harmonique $l_{ho} = \sqrt{1/m\bar{\omega}}$ où $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ est la moyenne géométrique des pulsations du piège harmonique.

En utilisant la définition du propagateur :

$$\mathcal{G}_0(\omega_{n'}, \mathbf{k}) = \frac{1}{i\omega_{n'} - \frac{k^2}{2m} + \mu}, \quad (2.23)$$

et le résultat d'analyse pour une fonction complexe $a(\omega)$:

$$\frac{1}{\beta} \sum_{n' \text{ impair}} a(i\omega_{n'}) = \oint \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{1}{e^{\omega'} + 1} a(\omega'), \quad (2.24)$$

on obtient par prolongement analytique, la partie imaginaire de la self-énergie retardée :

$$\text{Im } \Sigma_R(\omega, \mathbf{k}) = - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(n_{\mathbf{p}}^0 + \frac{1}{e^{\beta(\omega + \xi_{\mathbf{p}}^0)} - 1} \right) \times \text{Im } \Gamma(\omega + \xi_{\mathbf{p}}^0, \mathbf{k} + \mathbf{p}), \quad (2.25)$$

qui devra être évaluée numériquement et à partir de laquelle on peut obtenir la partie réelle *via* la relation de dispersion :

$$\text{Re } \Sigma(\omega, \mathbf{k}) = -\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im } \Sigma(\omega', \mathbf{k})}{\omega - \omega'}. \quad (2.26)$$

2.3.1 Relation de dispersion des quasiparticules

Comme nous allons utiliser l'équation de Boltzmann pour la description des modes collectifs, nous allons donc considérer implicitement que les quasiparticules, principalement près de la surface de Fermi, sont bien définies et ont par conséquent un temps de vie très grand. Cette considération est bien entendu une limitation de notre approche [49]. Si les quasiparticules sont bien définies, cela signifie que $\text{Im } \Sigma(\xi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$ est suffisamment petite et qu'elles sont déterminées par les pôles de la fonction de Green à une particule, donnée par :

$$\xi_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}}^0 + \text{Re } \Sigma(\xi_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}). \quad (2.27)$$

Un tel traitement va au-delà de notre travail. Ici, nous avons complètement négligé la dépendance en énergie et moment de la self-énergie. Comme nous sommes principalement intéressés par les moments (resp. énergies) proches du moment (resp. de l'énergie) de Fermi, nous supposons :

$$\xi_{\mathbf{k}} \approx \xi_{\mathbf{k}}^0 + U, \quad \text{avec} \quad U = \text{Re} \Sigma(0, k_\mu), \quad (2.28)$$

où $k_\mu = \sqrt{2m\mu}$ (qui est le moment de Fermi théorique) peut être très différent de k_F (moment de Fermi utilisé expérimentalement) défini précédemment. U sera le potentiel de champ moyen dans l'équation de Boltzmann. Pour éviter de négliger la dépendance en énergie et impulsion de la self énergie, il est possible d'utiliser une meilleure approximation de quasiparticule [50]. Néanmoins, une évaluation numérique des nouveaux paramètres représentant la dépendance en énergie et en impulsion de la self énergie et par conséquent du champ moyen montre que ces effets sont faibles et ne constituent pas une bonne voie pour améliorer notre calcul.

2.3.2 Température critique, critère de Thouless

La matrice T dans le milieu nous permet de déterminer la température critique T_C du système, c'est-à-dire la température à partir de laquelle le système deviendra superfluide. Par ailleurs, le critère de Thouless est un critère qui relie la température critique T_C à la température où la matrice T développe un pôle au niveau de la surface de Fermi ($\omega = 0$). Comme cela avait déjà été remarqué par Nozières et Schmitt-Rink [43], ce critère reste vrai pour tous les couplages. Comme ce pôle apparaît toujours d'abord pour $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, la température critique sera alors donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(1 + iaq_{cm} - \frac{4\pi a}{m} \tilde{J} \right) &= 0 \\ \text{soit} \quad \text{Re} \quad \tilde{J}(\omega = 0, \mathbf{k} = \mathbf{0}, T = T_C) &= \frac{m}{4\pi a}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ainsi, on pourra déterminer numériquement, à partir de l'équation implicite précédente, la température critique du système étudié. Ceci nous permet de limiter notre étude au domaine $T > T_C$ car comme nous l'avons déjà vu, notre théorie ne tient pas compte de l'appariement des fermions.

2.4 La densité

L'interaction entre les particules change fortement l'équation d'état de notre système, *i.e.* la relation entre le potentiel chimique μ et la densité ρ . De manière générale, la détermination de la relation $\rho(\mu, T)$ revient à résoudre l'équation auto-cohérente :

$$\rho(\mu, T) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{n \text{ impaire}} \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{k}), \quad (2.30)$$

\mathcal{G} étant la fonction de Green complète à une particule. Cette équation étant très difficile à résoudre, nous allons considérer différentes approximations utilisées par la suite et l'équation d'état correspondante dans chaque cas (Fig. 2.3).

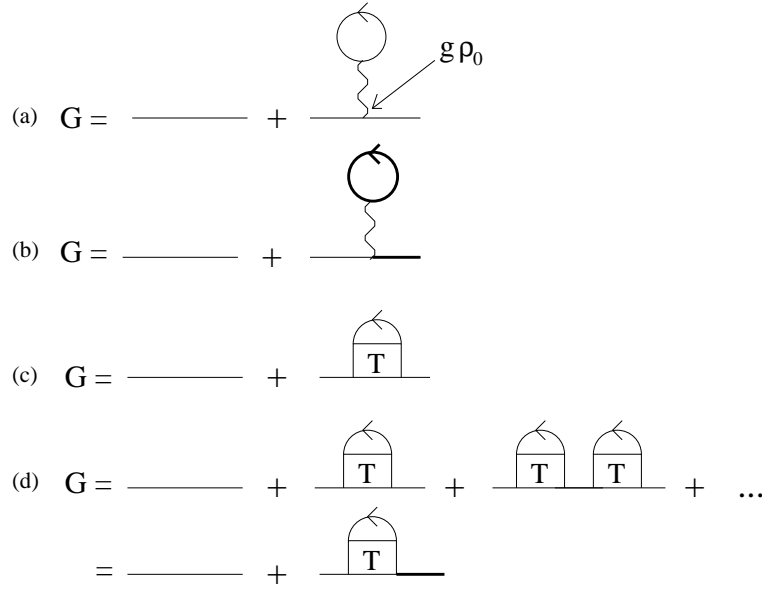


FIG. 2.3 – Représentation diagrammatique de la densité suivant les différents niveaux d'approximation. Le propagateur nu (resp. complet) est représenté avec un trait fin (épais). De haut en bas, le cas perturbatif, le cas Hartree-Fock (Hartree ici) puis l'approximation que l'on a utilisée pour le calcul des corrélations. Enfin, sur les deux dernières lignes, on a représenté l'équation de Dyson complète : $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0 \Sigma \mathcal{G}$ dans l'approximation de la matrice T .

2.4.1 Les cas libre et perturbatif

Dans le cas libre, on peut calculer explicitement la densité à température nulle. D'un point de vue diagrammatique, on ne considère que le diagramme nu donc la densité :

$$\rho_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \mathcal{G}_0(\omega_n, \mathbf{k}) \quad (2.31)$$

où le propagateur est alors donné par $\mathcal{G}_0(\omega_n, k) = \frac{1}{i\omega_n - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu}$. Le calcul de la densité est simplement donné par :

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \theta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\sqrt{\frac{2m\mu}{\hbar^2}}} k^2 dk = \frac{1}{6\pi^2} \frac{(2m\mu)^{3/2}}{\hbar^3}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

On retrouve la formule connue $\rho_0 = \frac{k_F^3}{6\pi^2}$ avec $k_F = \sqrt{\frac{2m\mu}{\hbar^2}}$. La densité libre nous permettra par la suite de comparer les résultats. En effet, on comparera toujours ρ/ρ_0 calculés pour deux modèles différents (Fig. 2.4).

Si l'on cherche à ajouter de manière simple les interactions entre les particules, on introduit le diagramme faisant intervenir l'interaction sur le propagateur libre (Fig. 2.3 (a)). La

densité devient alors :

$$\begin{aligned}
 \rho(\mu) &= \rho_0 + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \mathcal{G}_0^2(\omega_n, k) g \rho_0 \\
 &= \rho_0 - \frac{d}{d\mu} \left(\int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \mathcal{G}_0(\omega_n, k) \right) g \rho_0 \\
 &= \rho_0 - \frac{d\rho_0}{d\mu} g \rho_0
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

où l'on a utilisé le fait que $\frac{d\mathcal{G}_0(\omega_n, k)}{d\mu} = -\mathcal{G}_0^2(\omega_n, k)$. On remarque ici le caractère perturbatif de cette approche. L'aspect perturbatif peut aussi être vu comme une modification du potentiel chimique du gaz libre par l'interaction. En effet, le potentiel chimique μ est remplacé par $\mu - g\rho_0$ dans la densité libre. Ainsi, pour une interaction attractive ($g < 0$), les atomes ont une distance moyenne plus faible. Le nombre de particules, dans un même volume, paraît alors plus grand et le potentiel chimique du gaz est donc plus important. Par linéarisation, on obtient alors facilement :

$$\begin{aligned}
 \rho(\mu) &= \rho_0(\mu - g\rho_0) = \rho_0(\mu) - \frac{d\rho_0}{d\mu} g \rho_0(\mu) \\
 &= \frac{(2m\mu)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{2m\mu a^2}{\hbar^2} \right)^{1/2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

On peut remarquer que l'on trouve une densité proportionnelle à ρ_0 et dont le terme correctif dépend uniquement de $(\frac{2m\mu a^2}{\hbar^2})^{1/2} \equiv k_F a$.

2.4.2 Le cas Hartree-Fock

L'approximation Hartree-Fock revient à ne considérer que le propagateur habillé pour la partie en interaction du diagramme (Fig. 2.3 (b)), donc à modifier le potentiel chimique du gaz libre μ par celui du cas en interaction $\mu - g\rho$ où contrairement au cas perturbatif ρ n'est pas la densité libre mais la nouvelle densité.

$$\rho(\mu) = \rho_0(\mu - g\rho) = \frac{1}{3\pi^2} [2m(\mu - g\rho)]^{3/2}. \tag{2.35}$$

On peut alors obtenir une équation en terme de k_F , en notant que $\epsilon_F = \mu - g\rho$ et donc que $\rho = \frac{\mu - \epsilon_F}{g}$:

$$k_F^3 = 6\pi^2 \rho(\mu) = 6\pi^2 \frac{\mu - \epsilon_F}{g} = \frac{3\pi m}{2a} (\mu - \epsilon_F) = \frac{3\pi m}{2a} \left(\mu - \frac{k_F^2}{2m} \right) \tag{2.36}$$

ce qui donne l'équation :

$$y(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{12ma^2\mu}{\pi^2} = 0 \quad \text{avec} \quad x = \frac{2|a|k_F}{\pi} \tag{2.37}$$

dont l'existence d'une solution pour $0 < x < 1$ impose la condition :

$$\mu < \frac{\pi^2}{24ma^2} = \mu_{max}. \tag{2.38}$$

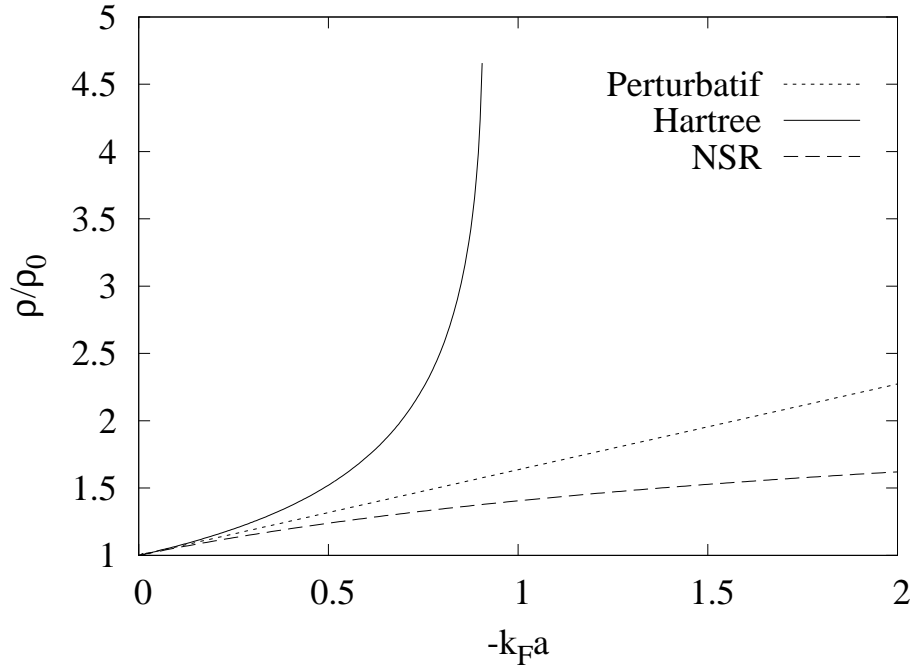


FIG. 2.4 – On représente l'écart au cas libre ρ/ρ_0 de la densité pour les différents modèles étudiés en fonction de l'interaction $-k_F a$. Pour les faibles interactions, les modèles sont en accord alors que pour les fortes interactions, l'approximation de Hartree n'est plus valide bien avant $-k_F a > \pi/2$.

La densité par état de spin est alors donnée par :

$$\rho_{max} = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{\pi x_{max}}{2|a|} \right)^3 = \frac{\pi}{48|a|^3}. \quad (2.39)$$

Comme nous l'avons déjà vu (Sec. 2.1), on retrouve la valeur de [42] qui correspond à la densité où le système devient instable pour la séparation des phases entre basse densité (gaz) et haute densité (solide). Ainsi, dans ce modèle, un gaz de Fermi à basse température avec une interaction attractive devrait être instable dès que $k_F|a| > \pi/2$. L'expérience prouvant que les gaz de fermions froids sont stables pour de plus grandes valeurs de $k_F|a|$, il faut décrire la densité du gaz de manière plus satisfaisante quand les interactions entre particules deviennent importantes (Fig. 2.4).

2.4.3 Les corrélations

Si l'on prend en compte les corrélations, la densité est donnée par la relation :

$$\rho = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{n \text{ impaire}} \mathcal{G}(\omega_n, \mathbf{k}), \quad (2.40)$$

où \mathcal{G} représente la fonction de Green totale à une particule qui est reliée à la self-énergie Σ par la relation de Dyson : $\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}_0^{-1} - \Sigma$. Ici, on se restreint à un développement de \mathcal{G} au premier ordre en Σ (Fig. 2.3 (c) et (d)), on a alors :

$$\mathcal{G} \approx \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0 \Sigma^* \mathcal{G}_0. \quad (2.41)$$

L'expression de la densité s'écrit donc :

$$\rho = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \mathcal{G}_0(\omega_n, \mathbf{k}) + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \mathcal{G}_0^2(\omega_n, \mathbf{k}) \Sigma(\omega_n, k) = \rho_0 + \rho_1 \quad (2.42)$$

où la partie non corrélée est donnée par :

$$\rho_0 = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_{n \text{ impaire}} \mathcal{G}_0(\omega_n, \mathbf{p}). \quad (2.43)$$

On calcule le terme ρ_1 de correction à la densité libre dans l'approximation de la matrice T :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{d}{d\mu} [\mathcal{G}_0(\omega_n, \mathbf{k})] \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_m \mathcal{G}_0(\omega_m, \mathbf{k}) \Gamma(\omega_n + \omega_m, \mathbf{p} + \mathbf{k}) \\ &= - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_n \left\{ \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_m \left(\frac{d}{d\mu} \mathcal{G}_0(\omega_N - \omega_m, \frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{q}) \right) \mathcal{G}_0(\omega_m, \frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{q}) \right\} \Gamma(\omega_N, \mathbf{K}) \end{aligned}$$

où l'on a effectué les changements de variables : $\omega_N = \omega_m + \omega_n$, $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$ et $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{p}-\mathbf{k}}{2}$. En remarquant que :

$$\begin{aligned} &\int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_m \left(\frac{d}{d\mu} \mathcal{G}_0(\omega_N - \omega_m, \frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{q}) \right) \mathcal{G}_0(\omega_m, \frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_m \mathcal{G}_0(\omega_N - \omega_m, \frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{q}) \mathcal{G}_0(\omega_m, \frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\mu} J_0^M(\omega_N, \mathbf{k}) \end{aligned}$$

et en utilisant la définition de la matrice T : $\Gamma_M(\omega_N, \mathbf{K}) = \frac{g}{1 - gJ_0^M(\omega_N, \mathbf{k})}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_N \frac{dJ_0}{d\mu} \frac{g}{1 - gJ_0^M(\omega_N, \mathbf{k})} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \sum_N \frac{d}{d\mu} [\ln(1 - gJ_0^M(\omega_N, \mathbf{k}))] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} \frac{d}{d\mu} [Im \ln(1 - gJ_0^M(\omega_N, \mathbf{k}))]. \quad (2.44) \end{aligned}$$

Ce résultat pour la densité correspond à celui trouvé par Nozières, Schmitt-Rink [43] et Sá de Melo, M. Randeria, J.R. Engelbrecht [51]. C'est la formule NSR de la densité corrélée. Cette formulation de la densité permet de décrire les interactions attractives en particules dans le gaz, néanmoins pour des raisons pratiques, nous verrons que l'on ne peut pas l'utiliser sous cette forme. La formule NSR nous permettra de vérifier l'inclusion des corrélations dans la nouvelle formulation.

2.4.4 Quasiparticule

Dans l'approche de l'équation de Boltzmann, la densité doit être exprimée comme une intégrale sur les moments d'une fonction de distribution f :

$$\rho = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{p}). \quad (2.45)$$

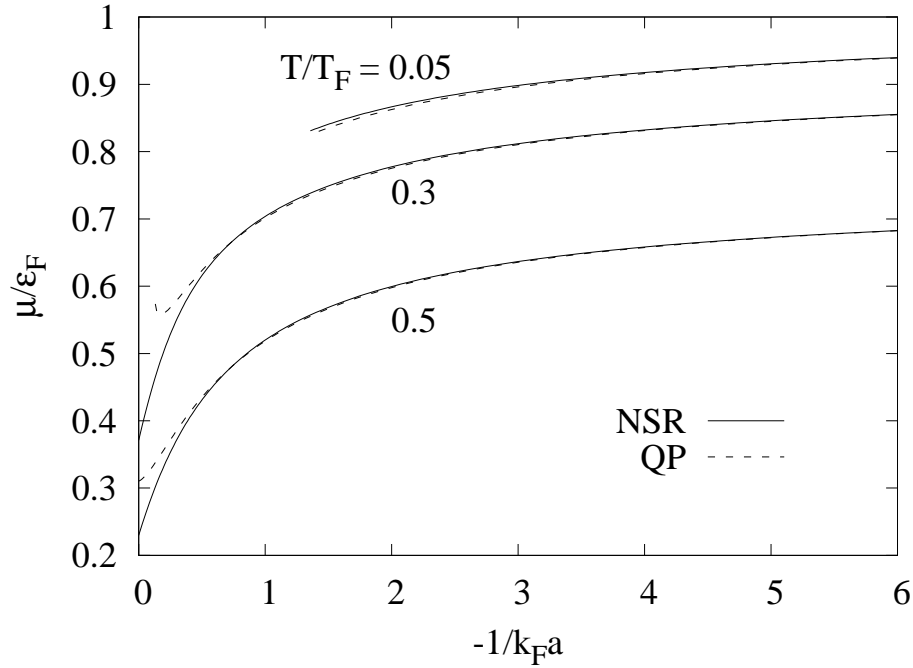


FIG. 2.5 – De haut en bas, on trace μ/ϵ_F calculés pour $T/T_F = 0.05$, $T/T_F = 0.3$ et $T/T_F = 0.5$. Le μ_{QP} devient plus important uniquement pour les faibles valeurs de $-1/k_F a$.

Malheureusement, la formule NSR de la densité trouvée précédemment n'est pas utilisable en tant que densité de l'état fondamental dans l'équation de Boltzmann car on ne peut pas la mettre sous la forme (2.45). Par ailleurs, à l'équilibre, la fonction de distribution est donnée par :

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta \xi_{\mathbf{p}}} + 1}, \quad (2.46)$$

Si l'on utilise l'énergie de la particule $\xi_{\mathbf{p}} \approx \xi_{\mathbf{p}}^0 + U$ (voir (2.28)) , on obtient une méthode alternative pour le calcul de la densité en fonction de μ . Afin de comparer les deux profils de densité dans un milieu infini, on a tracé le potentiel chimique, pour une densité fixée, avec la densité calculée à l'aide des formules NSR et quasiparticule (QP) pour différentes températures (Fig. 2.5). On remarque que les deux méthodes donnent des résultats similaires. Les interactions induisent une diminution du potentiel chimique par rapport au résultat du gaz idéal. Aux faibles interactions, les courbes QP et NSR sont en accord parfait, mais pour les fortes interactions il existe des différences notamment pour les faibles températures proches de T_C . C'est la fin de validité de notre approche près du régime de pseudogap. La température critique déterminée à partir du critère de Thouless dépend de a et μ ; il existe donc une interaction critique a_c lorsque la température est fixe. Ainsi, la courbe est coupée pour les valeurs $-1/k_F a < -1/k_F a_c$.

2.5 La section efficace

L'interaction entre atomes n'est pas seulement responsable du décalage en énergie des particules, elle détermine aussi le taux de collisions entre atomes, qui joue un rôle important

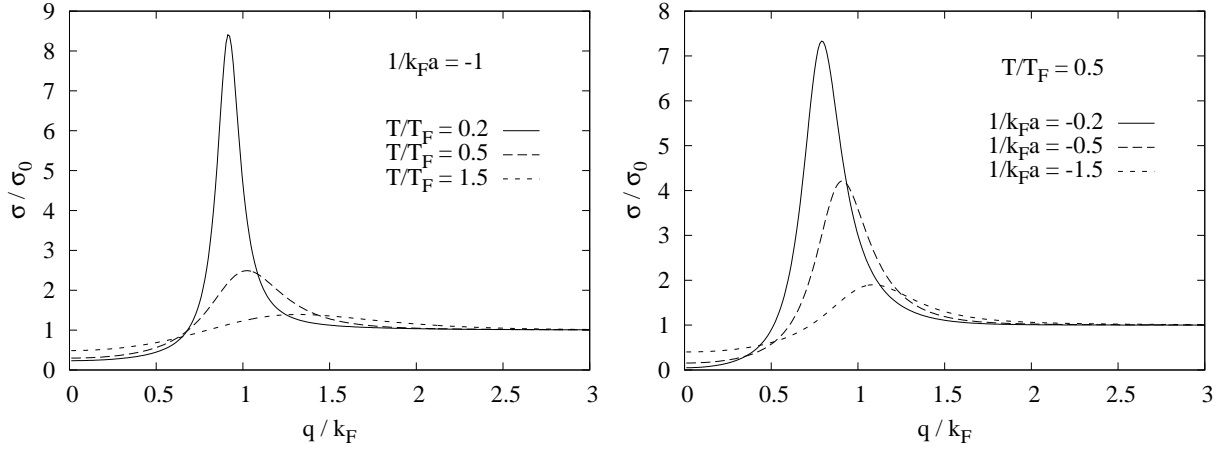


FIG. 2.6 – On trace le rapport entre les sections efficaces dans le milieu et dans le vide pour un moment total $k = 0$ en fonction du moment relatif q . Sur la figure de gauche, l'interaction est constante ($1/k_F a = -1.0$), le résultat est donné pour différentes températures. Sur la figure de droite, la température est constante ($T/T_F = 0.5$) et on observe l'effet pour différentes interactions.

pour les propriétés des modes collectifs. La quantité physique à considérer ici est la section efficace pour des ondes s . Dans le cas d'une interaction d'onde s de portée nulle, la section efficace différentielle de deux atomes de moments \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 avant la collision, \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 après la collision est donnée par [52] :

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \frac{a^2}{1 + (qa)^2} \quad (2.47)$$

avec $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$ le moment relatif entrant dans le référentiel du centre de masse et Ω l'angle solide formé entre le moment relatif entrant \mathbf{q} et le moment relatif sortant ($\mathbf{q}' = \frac{\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2}{2}$). Dans le milieu, la section efficace est modifiée par les interactions. En terme de matrice T , la section efficace est reliée à la partie imaginaire de la matrice T *via* le théorème optique [39], donc au module carré de la matrice T . La section efficace différentielle peut alors être écrite :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{m}{4\pi} \Gamma \left(\frac{k^2}{4m} + \frac{q^2}{m} - 2\mu, \mathbf{k} \right) \right|^2 \quad (2.48)$$

et dépend maintenant aussi du moment total des deux atomes $\mathbf{k} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$. A partir de cette équation, en utilisant (2.17) et $\omega = \frac{k^2}{4m} + \frac{q^2}{m} - 2\mu$ dans la définition de q_{cm} , on retrouve le cas libre (2.47). On peut alors maintenant comprendre quels seront les effets du milieu sur la section efficace qui sera réduite ou augmentée en comparaison avec la section efficace dans l'espace libre. La courbe représentant le rapport entre la section efficace calculée *via* la matrice T et celle dans le vide permet de comprendre l'influence du milieu (Fig. 2.6). Le cas $k = 0$ correspond au cas où l'effet est le plus important (facteur exponentiel de la distribution de Fermi moins grand). On voit que pour un moment relatif q faible, la section efficace dans le milieu est plus faible, tandis que pour les moments relatifs moyens ($q \sim k_F$), la section efficace est fortement augmentée, l'effet étant d'autant plus important que la température est faible ou l'interaction forte. Enfin, pour les grands moments relatifs, le milieu devient transparent et les deux sections efficaces sont identiques. La forte augmentation de la section efficace près de la température critique est un signe

précurseur de la singularité de la matrice T à la température critique [53, 54, 55].

2.6 Approximation de densité locale

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré un milieu infini où les atomes ne sont pas piégés par un potentiel externe. Afin d'inclure le potentiel de piège $V_T(\mathbf{r})$, nous allons utiliser l'approximation de densité locale (LDA), où le système est traité comme localement homogène, avec une dépendance en \mathbf{r} du potentiel chimique :

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V_T(\mathbf{r}). \quad (2.49)$$

Cette approximation reste valide tant que le potentiel varie lentement, *i.e.* sur des échelles grandes devant k_F^{-1} qui correspond à la distance moyenne entre les particules. De plus, cette condition est aussi nécessaire pour la validité de l'équation de Boltzmann que nous utiliserons par la suite. Avec cette approximation, toutes les quantités physiques que nous avons vues auront une nouvelle dépendance en \mathbf{r} qui provient de la dépendance en μ . Pour montrer les effets de l'interaction et de la température sur le profil de densité, on trace (Fig. 2.8) les profils de densités NSR et QP pour différentes valeurs de la température et de l'interaction. On remarque, pour une interaction constante, que le profil de densité s'étale si la température augmente. La densité au centre du gaz est alors plus faible. Tandis que pour une température donnée, si l'interaction (attractive) est plus importante, la densité au centre augmente aussi.

Comme nous l'avons déjà vu, il nous faut un critère quantitatif pour savoir si l'approximation quasiparticule est correcte. Comme exemple, on montre le profil de densité pour $N = 400000$ atomes dans le piège avec une interaction fixe $1/k_F a = -0.45$ pour différentes températures. Remarquons que l'on utilise la convention habituelle des expérimentateurs où la définition de k_F et ϵ_F pour un gaz piégé est différente de celle du cas uniforme. Dans le cas du gaz piégé, ces valeurs sont celles au centre du piège calculées pour un gaz idéal à température nulle. Par conséquent, k_F et ϵ_F sont déterminés par le nombre d'atomes N et la fréquence moyenne du piège $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$:

$$\epsilon_F = (3N)^{1/3} \bar{\omega}, \quad k_F = \sqrt{2m\epsilon_F}. \quad (2.50)$$

On voit que l'interaction modifie le profil de densité, spécialement à faible température. L'accord entre les deux profils semble parfait à $T/T_F = 0.5$, alors que pour $T/T_F = 0.21$ qui correspond à la température critique, la densité QP est trop faible, indiquant que l'approximation QP n'est plus utilisable. Cependant, pour $1/k_F a = -0.45$, on doit être très proche de T_C afin de voir cet effet qui sera encore plus marqué à l'unitarité.

De manière pratique, on a utilisé pour les calculs un potentiel de piège harmonique :

$$V_T(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} \sum_{i=x,y,z} \omega_i^2 r_i^2. \quad (2.51)$$

Même si les pièges expérimentaux sont non sphériques, on détermine les quantités physiques à l'équilibre pour un piège sphérique avec le même nombre d'atomes et une fréquence moyenne $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$. Les quantités physiques à l'équilibre, mesurées expérimentalement dans le piège déformé, sont alors obtenues par le changement de variables : $\tilde{r}_i = r_i \omega_i / \bar{\omega}$.

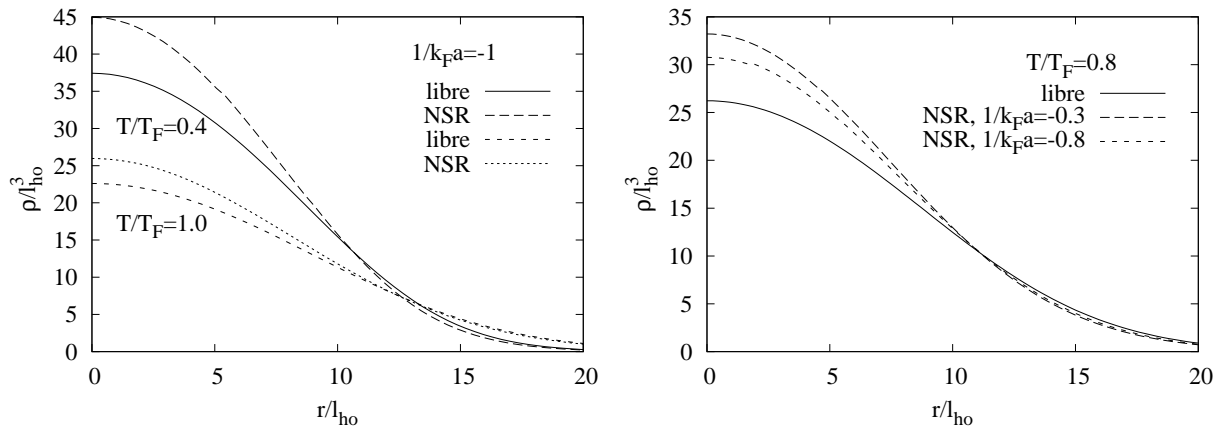


FIG. 2.7 – On trace le profil de densité obtenu par l'approximation de densité locale (LDA). Sur la figure de gauche, l'interaction est constante ($1/k_F a = -1$), on compare à $T/T_F = 0.4$ (resp. $T/T_F = 1.0$), la densité libre (trait plein) (resp. tiret court) et la densité NSR (long tiret) (resp. pointillés). Sur la figure de droite, la température est constante, la densité libre (trait plein), la densité NSR pour $1/k_F a = -0.3$ et la densité NSR pour $1/k_F a = -0.8$ sont représentées.

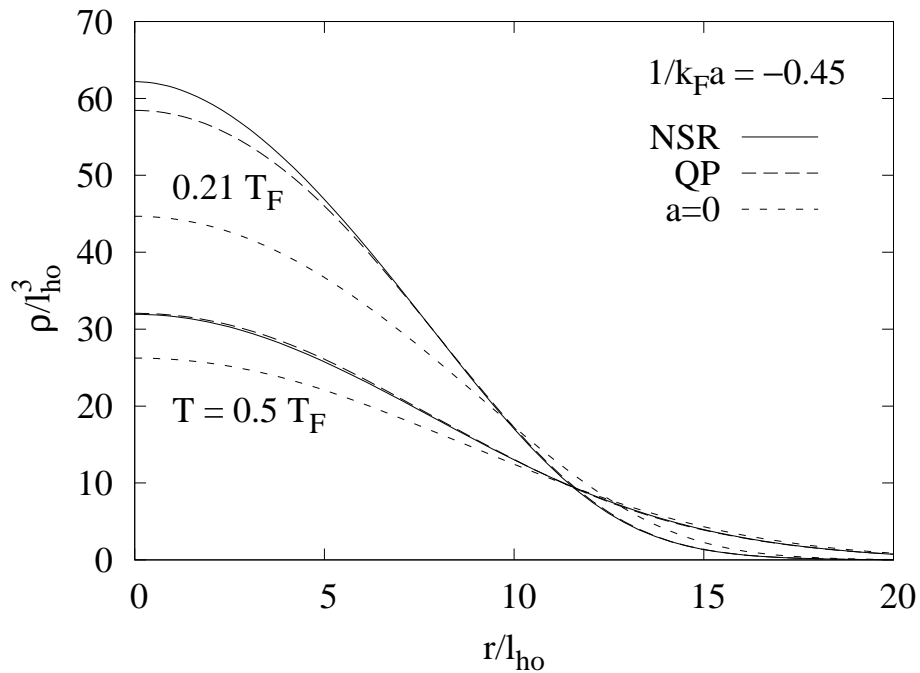


FIG. 2.8 – Profils de densité de 400000 atomes avec $1/k_F a = -0.45$ pour différentes températures, calculés avec la formule NSR (trait plein) et l'approximation quasiparticule (grands tirets). Pour comparer, on trace aussi le profil de densité d'un gaz de Fermi idéal (petits tirets).

Chapitre 3

Fréquence et amortissement des modes collectifs

L'étude des modes collectifs est un outil important pour sonder la dynamique des gaz d'atomes. En effet, même si le spectre des modes collectifs dans le régime hydrodynamique et celui dans la phase superfluide est le même, il a été prouvé que l'amortissement en fonction de la température peut permettre de distinguer le régime superfluide du gaz normal [30]. Dans ce chapitre, nous étudions le spectre des modes collectifs d'un gaz de Fermi à deux composantes dans sa phase normale. Le point de départ de cette étude est l'équation de Boltzmann pour la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Mon travail a été de considérer les effets du milieu dans la section efficace de l'intégrale collisionnelle et l'ajout d'un terme de type champ moyen dans le membre de gauche de l'équation de Boltzmann. Le but est de déterminer les fréquences et l'amortissement de différents modes étudiés expérimentalement [31, 56, 57, 58, 59].

3.1 Théorie cinétique : équation de Boltzmann

Alors qu'il existe un traitement unifié pour la physique statistique à l'équilibre, les méthodes utilisées pour décrire les systèmes hors-équilibre sont multiples et en réalité adaptées à un certain type de problèmes. Comme nous l'avons déjà dit, nous nous limitons ici au cas de systèmes peu denses tels que le libre parcours moyen est beaucoup plus grand que la portée des interactions entre deux particules. Cela permet de distinguer au niveau microscopique deux échelles de temps : la durée d'une collision et le temps entre deux collisions. On regarde alors une théorie cinétique qui décrit de manière satisfaisante la dynamique pour des temps longs comparés à la durée d'une collision t_0 et faibles devant le temps entre deux collisions t_1 . L'équation de Boltzmann est une équation qui décrit la relaxation dans un gaz où les collisions sont rares mais peuvent être violentes (les vitesses peuvent changer considérablement au cours d'une collision). La trajectoire typique d'une particule est constituée d'une succession de segments de droite (mouvement libre) interrompus par des collisions au cours desquelles la trajectoire change brusquement (les collisions ne font intervenir que deux particules à cause de la densité faible). Cette situation est donc opposée au mouvement brownien où la particule subit continuellement un grand nombre de collisions faibles, qui modifient chacune peu la vitesse de la particule brownienne.

Pour déterminer le domaine de validité de l'équation de Boltzmann, on doit aussi fixer

une échelle de longueur. On étudie un système dans le cadre des milieux continus : $\lambda \ll L$ avec λ le libre parcours moyen et L l'échelle caractéristique de variation des grandeurs du système [60]. Ainsi, à l'échelle d'une particule, les variations des grandeurs physiques du système sont faibles. Cet argument a déjà été utilisé pour l'approximation de densité locale (Sec. 2.6).

On rappelle les trois conditions supposées précédemment : la densité est supposée varier sur de grandes échelles, la température est supérieure à la température critique de la transition superfluide et les quasiparticules doivent être bien définies proche de la surface de Fermi. Sous ces conditions, le comportement d'un gaz de fermions peut être décrit par la fonction de distribution semi-classique $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ dont l'évolution temporelle est déterminée par l'équation de Boltzmann [61] :

$$\dot{f} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = -I[f], \quad (3.1)$$

où $\dot{\mathbf{r}}$ et $\dot{\mathbf{p}}$ satisfont les équations classiques du mouvement. Dans le cas de la relation de dispersion déjà mentionnée, la vitesse et l'accélération sont alors données par :

$$\dot{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} \xi_{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}} (V_T + U), \quad (3.3)$$

où avec l'approximation de densité locale, $\xi_{\mathbf{p}} \rightarrow \xi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = p^2/(2m) + V_T(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) - \mu_0$. On peut noter qu'il y a deux sources de dépendance en \mathbf{r} du potentiel de champ moyen U . Tout d'abord, à l'équilibre, U dépend de \mathbf{r} via le potentiel chimique $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 - V_T(\mathbf{r})$. Ensuite, plus généralement, et en particulier hors équilibre, la self-énergie dépend de la fonction de distribution f , ce que l'on peut écrire : $U = U[f]$. Cette fonction de distribution est reliée à la densité par état de spin par la relation :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (3.4)$$

et on considérera que, comme à l'équilibre, les fonctions de distribution pour les deux états de spin sont les mêmes, *i.e.* : $f_{\downarrow} = f_{\uparrow} = f$, ce qui est vrai si le potentiel de piège et l'opérateur d'excitation du mode collectif sont indépendants du spin.

La fonctionnelle $I[f]$ qui apparaît dans le membre de droite de l'équation de Boltzmann est l'intégrale collisionnelle. Elle décrit les collisions entre atomes de spin opposé et dépend de la section efficace atome-atome [62] :

$$I[f] = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |v - v_1| \times \{f f_1 (1 - f')(1 - f'_1) - f' f'_1 (1 - f)(1 - f_1)\}. \quad (3.5)$$

Les fonctions f sont toutes évaluées à (t, \mathbf{r}) mais pour différentes impulsions. Par exemple, f_1 correspond à $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$. Les moments entrants sont \mathbf{p}, \mathbf{p}_1 tandis que $\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1$ sont les moments sortants du processus de collision. Les facteurs $(1 - f)$ sont absents dans le cas d'une équation de Boltzmann classique : ils sont une conséquence de la statistique de Fermi et assurent qu'un atome ne peut pas diffuser vers un état déjà occupé. Cet effet de blocage de Pauli peut avoir pour conséquence une forte réduction du taux de collisions, spécialement à basse température. Afin d'étudier les modes collectifs dans un gaz piégé, on considère une faible

déviations $\delta f = f - f_{eq}$ de la fonction de distribution. En général, δf est fortement piqué à la surface de Fermi, mais peut s'écrire à l'aide d'une fonction test $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p})[1 - f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p})]\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (3.6)$$

En développant l'équation de Boltzmann à l'ordre linéaire dans la déviation par rapport à l'équilibre et en considérant qu'à un changement δf de la fonction de distribution correspond un changement δU du champ moyen, on obtient :

$$f_{eq}(1 - f_{eq})\left(\dot{\Phi} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r \Phi - \nabla_r(V_T + U_{eq}) \cdot \nabla_p \Phi + \beta \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r \delta U\right) = -I[\Phi]. \quad (3.7)$$

avec l'intégrale collisionnelle linéarisée :

$$I[\Phi] = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| f_{eq} f_{eq1} \times (1 - f'_{eq})(1 - f'_{eq1})(\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi'_1). \quad (3.8)$$

Afin d'obtenir cette équation de Boltzmann linéarisée, nous avons utilisé la propriété :

$$\left(\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r - \nabla_r(V_T + U_{eq}) \cdot \nabla_p\right) f_{eq}(1 - f_{eq}) = 0 \quad (3.9)$$

qui provient de l'équation de Boltzmann à l'équilibre.

Nous devons maintenant spécifier δU qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation de Boltzmann linéarisée. Comme on néglige la dépendance en moment de U et donc de δU , on peut alors écrire δU sous la forme :

$$\delta U(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \gamma(p) \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (3.10)$$

où $\gamma(p)$ est la dérivée fonctionnelle $\delta U[f]/\delta f$ évaluée à l'équilibre. Dans la limite des basses températures, δf est fortement piquée pour $p = p_F$ le moment de Fermi. On peut donc remplacer $\gamma(p)$ par une constante $\gamma_0 \equiv \gamma(p_F)$ comme dans la théorie des liquides de Fermi [63]. On en déduit alors que $\delta U = \gamma_0 \delta \rho$, avec

$$\delta \rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_{eq}(1 - f_{eq}) \Phi. \quad (3.11)$$

De plus, en choisissant pour δf une forme particulière, $\delta f = \partial f_{eq}/\partial \mu$, on peut identifier la constante γ_0 avec la dérivée $\partial U_{eq}/\partial \rho_{eq}$ prise à température constante :

$$\delta U(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{\partial U_{eq}}{\partial \rho_{eq}} \right|_{\rho_{eq}(\mathbf{r}), T} \delta \rho(\mathbf{r}, t). \quad (3.12)$$

Dans la suite, nous considérerons que cette approximation est aussi raisonnable à haute température. Ce jeu d'équations constitue le point de départ de notre étude des modes collectifs avec les effets de milieu. Il s'agit d'une généralisation de l'approximation de Hartree où $U = g\rho$ [52, 64, 65].

Finalement, l'équation de Boltzmann linéarisée s'écrit sous la forme :

$$f_{eq}(1 - f_{eq})\dot{\Phi} + \nabla_{\mathbf{p}} f_{eq} \cdot \left[-\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\Phi}{\beta} + \frac{dU_{eq}}{d\rho_{eq}} \delta \rho \right) \right] + \nabla_{\mathbf{r}} f_{eq} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \frac{\Phi}{\beta} = -I[\Phi]. \quad (3.13)$$

Cette équation constitue la base du calcul des fréquences et amortissements par la méthode des moments.

mode		fréquence piège	$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	$\Phi(\mathbf{r}, t)e^{i\omega t}$
Kohn	(K)	arbitraire	$\propto (1, 0, 0)$	$c_1x + c_2p_x$
ciseaux	(S)	$\omega_x > \omega_y \gg \omega_z$	$\propto (y, -x, 0)$	$c_1xy + c_2xp_y + c_3yp_x + c_4p_xp_y$
radial quadrupolaire	(Q)	$\omega_x = \omega_y = \omega_r \gg \omega_z$	$\propto (x, -y, 0)$	$c_1(x^2 - y^2) + c_2(xp_x - yp_y) + c_3(p_x^2 - p_y^2)$
radial } respiration	(B)	$\omega_x = \omega_y = \omega_r \gg \omega_z$	$\propto (x, y, 0)$	$\begin{cases} c_1(x^2 + y^2) + c_2z^2 + c_3(xp_x + yp_y) \\ + c_4zp_z + c_5(p_x^2 + p_y^2) + c_6p_z^2 \end{cases}$
axial			$\propto (0, 0, z)$	

TAB. 3.1 – Champ de vitesse et fonction test Φ correspondante pour les différents modes considérés.

3.2 Fonction test Φ

Comme on l'a vu précédemment, la fonction $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ caractérise la déviation par rapport à l'équilibre. Cette fonction est supposée régulière dans l'espace des phases. Le développement de la fonction test Φ à l'aide d'un faible nombre de coefficients permet d'éviter la résolution exacte de l'équation de Boltzmann linéarisée. Pour chaque mode collectif, la fonction test Φ doit contenir au moins les termes nécessaires pour générer le champ de vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ qui caractérise le mode [66]. La présence de ce champ de vitesse modifie la fonction de distribution à l'équilibre f_{eq} telle que :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p} - m\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), t), \quad (3.14)$$

ce qui donne une déviation (au premier ordre en \mathbf{u}) :

$$\delta f \simeq -\beta f_{eq}(1 - f_{eq}) \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.15)$$

La fonction test doit donc contenir un terme proportionnel à $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}$. Quand ce terme est inséré dans l'équation de Boltzmann linéarisée, l'opérateur $\mathbf{p}/m \cdot \nabla_r - \nabla_r(V_T + U_{eq}) \cdot \nabla_p$ du membre de gauche génère de nouveaux termes tout comme le terme δU et le terme de collision I . En général, le nombre de termes est infini et le système ne peut être résolu.

Si l'on ne considère que le membre de gauche de l'équation de Boltzmann sans effet de champ moyen et sans perturbation d'un gaz dans un piège harmonique V_T , si u est au plus linéaire dans les coordonnées, il est possible de résoudre l'équation avec un nombre fini de termes : par exemple un terme proportionnel à xp_x génère des termes proportionnels à x^2 et p_x^2 , et aucun autre terme n'est nécessaire. D'autre part, si le terme de collision est très important, donc dans le régime hydrodynamique, un champ de vitesse linéaire résout exactement les équations hydrodynamiques et l'équation d'état du gaz peut être donnée par une équation polytropique, ce qui constitue très souvent une excellente approximation [30]. On considèrera donc que dans notre cas aussi, ce sera une bonne approximation d'inclure uniquement dans Φ les termes qui apparaissent dans le cas du gaz idéal correspondant à un champ de vitesse u linéaire en les coordonnées.

Nous nous intéresserons ici aux trois modes suivants : le mode ciseaux, le mode radial quadrupolaire et le mode radial de respiration. Afin de vérifier la cohérence de notre modèle, nous allons aussi regarder le mode de Kohn qui apparaît comme un mode non-amorti dont la fréquence est égale à celle du piège. Les champs de vitesse et les fonctions tests correspondantes sont données dans le tableau (Table 3.1).

3.3 Fréquence et amortissement sans champ moyen

3.3.1 Etude du temps de relaxation

L'équation de Boltzmann décrit l'évolution du système et le membre de droite définit donc un temps de relaxation τ du gaz. Ce temps de relaxation correspond, pour un mode collectif, à la relaxation de la déformation importante de la surface de Fermi. Dans le cas particulier du mode ciseaux, ce temps de relaxation est calculé à partir l'équation de Boltzmann et donné par la relation :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} I[p_x p_y] p_x p_y}{\int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_{eq}(1 - f_{eq}) p_x^2 p_y^2} \quad (3.16)$$

avec $I[p_x p_y]$ donnée par Eq. (3.5). Ce paramètre τ sera l'unique paramètre de l'équation des modes et contient donc toute la dépendance en température et interaction des fréquences et amortissement du mode collectif.

L'équation (Eq. (3.16)) est l'analogue pour une statistique de Fermi de ce qui a déjà été défini dans [55]. Dans le cas du mode radial quadrupolaire et du mode radial de respiration, d'autres expressions formelles de τ apparaissent dans les étapes intermédiaires du calcul, mais on peut montrer que toutes les définitions coïncident. Il suffit donc d'un paramètre pour déterminer les trois modes. Plus précisément, seuls les termes dans Φ qui sont quadratiques dans les moments contribuent car $I[r_i r_j] = I[r_i p_j] = 0$ pour $i, j = x, y, z$. A l'aide des propriétés de symétrie de l'expression explicite pour $I[p_i p_j]$, on peut montrer que les moments avec $r_k r_l$ et $r_k p_l$ de $I[p_i p_j]$ sont nuls ($i, j, k, l = x, y, z$) et seules les expressions de la forme :

$$I_{ijkl} = \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} I[p_i p_j] p_k p_l \quad (3.17)$$

sont non nulles. En utilisant la loi de conservation, $I[p^2] = 0$, on peut alors montrer :

$$I_{ijkl} = I_S \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (3.18)$$

où I_S est le moment qui intervient pour le mode ciseaux, soit :

$$I_S = I_{xyxy} = \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} I[p_x p_y] p_x p_y. \quad (3.19)$$

On simplifie le calcul de I_S afin de le réduire au calcul d'une intégrale à 5 dimensions que l'on évalue ensuite par un Monte-Carlo. Le détail de la réduction est donnée en Annexe A.

3.3.2 Détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode

Dans cette partie, on détaille la méthode d'obtention de l'équation des modes à partir de l'équation de Boltzmann par la méthode des moments. On considère donc le mode ciseaux dont la fonction test Φ est donnée par la relation :

$$\Phi = (c_1 xy + c_2 x p_y + c_3 y p_x + c_4 p_x p_y) e^{-i\omega t}. \quad (3.20)$$

On insère l'ansatz Φ dans l'équation de Boltzmann linéarisée (Eq. (3.13)). On multiplie l'équation obtenue par les moments apparaissant dans la fonction test Φ du mode ciseaux (xy, xpy, ypx et $p_x p_y$), ce qui nous donne quatre équations que l'on intègre sur $d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$. Le détail de cette suite de calculs est donné en annexe (Sec. B.1). On obtient alors un système d'équations homogènes couplées pour les coefficients c_i . Si l'on pose

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix},$$

le système d'équations est donné par la relation $AX = 0$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -i\omega & -m\omega_y^2 & -m\omega_x^2 & 0 \\ 1/m & -i\omega & 0 & -m\omega_x^2 \\ 1/m & 0 & -i\omega & -m\omega_y^2 \\ 0 & 1/m & 1/m & \frac{1}{\tau} - i\omega \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Cette équation matricielle possède une solution non triviale ($X \neq 0$) si $\det A = 0$, soit :

$$\frac{i\omega}{\tau} [\omega^2 - \omega_h^2] + [\omega^2 - \omega_{c_1}^2] [\omega^2 - \omega_{c_2}^2] = 0 \quad (3.22)$$

qui correspond à l'équation des modes, avec

$$\begin{cases} \omega_h = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \\ \omega_{c_1} = \omega_x + \omega_y \\ \omega_{c_2} = |\omega_x - \omega_y| \end{cases} \quad (3.23)$$

qui représentent les fréquences limites (ω_h) dans le cas hydrodynamique ($\omega\tau \rightarrow 0$) et (ω_{c_i}) dans le cas sans collision ($\omega\tau \rightarrow \infty$). Cette équation des modes est le point de départ pour le calcul numérique que nous avons réalisé par la suite. On résout cette équation quadratique (cubique pour les modes radial quadrupolaire et radial de respiration) pour déterminer la partie réelle (fréquence) et imaginaire (amortissement) de ω . La dépendance en température et en interaction *via* $(k_F a)^{-1}$ de cette équation est contenue dans le temps de relaxation τ qui est la principale difficulté de la résolution numérique.

Pour les modes de respiration et quadrupolaire, l'équation des modes a une forme similaire :

$$i\omega(\omega^2 - \omega_{c,i}^2) - \frac{1}{\tau}(\omega^2 - \omega_{h,i}^2) = 0, \quad i = Q, B; \quad (3.24)$$

$$\text{où } \omega_{c,Q} = 2\omega_0, \quad \omega_{h,Q} = \sqrt{2}\omega_0 \quad (3.25)$$

sont les fréquences hydrodynamique et sans collision limites pour le mode quadrupolaire et

$$\omega_{c,B} = 2\omega_0, \quad \omega_{h,B} = \sqrt{\frac{10}{3}}\omega_0 \quad (3.26)$$

pour le mode de respiration.

3.4 Fréquence et amortissement dans le cas Hartree

La première approche de champ moyen effectuée a été réalisée par l'approximation de Hartree. Même si nous avons déjà vu que cette approximation ne fonctionne plus pour les faibles valeurs de $(k_F a)^{-1}$, donc les fortes densités ou fortes interactions, elle reste un cas limite important que nous pouvons chercher à retrouver par la suite dans notre étude au-delà du champ moyen Hartree. On détaille ici les résultats de l'obtention des fréquences et amortissement des modes collectifs dans le cas Hartree où $U = g\rho$.

3.4.1 Les énergies

Au cours des calculs effectués, on voit apparaître des fonctions classiques du système, que l'on va pouvoir identifier avec les énergies cinétiques, potentielles et d'interaction. Ainsi, on pose :

$$E_{kin} = 2 \int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2m} f_{eq} \quad (3.27)$$

$$E_{pot} = 2 \int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} V(r) f_{eq} \quad (3.28)$$

$$E_{int} = g \int d\mathbf{r} \rho^2. \quad (3.29)$$

Le facteur 2 est le facteur de dégénérescence du spin $\frac{1}{2}$ des particules considérées. On introduit aussi le paramètre [52] :

$$\xi = \frac{3E_{int}}{2E_{pot}} \quad (3.30)$$

qui déterminera le signe ainsi que l'écart relatif des fréquences.

On peut remarquer qu'à température nulle, le paramètre ξ est analytique et ne dépend que de $k_F a$. En effet, si l'on calcule l'énergie potentielle telle que définie précédemment pour le gaz de fermions à température nulle, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{pot} &= 2 \int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} V(r) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu + V(r))} + 1} \\ &= 2 \int d\mathbf{r} V(r) \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{max} = \sqrt{2m(\mu_0 - V(r))}} p^2 dp \quad \text{à } T = 0 \\ &= \frac{32\pi^2}{(2\pi)^3} \frac{(2m)^{3/2}}{6} m\omega^2 \int_0^{r_{max} = \sqrt{\frac{2\mu_0}{m\omega^2}}} r^4 \mu_0^{3/2} \left(1 - \frac{r^2}{r_{max}^2}\right)^{3/2} dr \\ &= \frac{16\pi^2}{3(2\pi)^3} (2m\mu_0)^{3/2} m\omega^2 r_{max}^5 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^4 \theta d\theta \quad \text{avec } r = r_{max} \sin \theta \\ &= \frac{\mu_0}{8} \left(\frac{\mu_0}{\omega}\right)^3. \end{aligned}$$

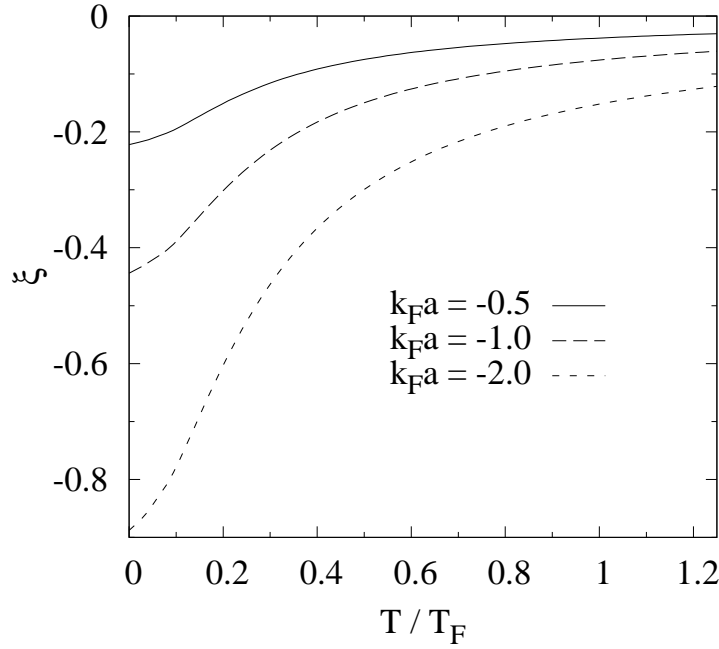


FIG. 3.1 – Tracé du paramètre ξ en fonction de la température pour différentes valeurs de l'interaction $k_F a$.

De même, pour l'énergie d'interaction, avec $g = \frac{4\pi a}{m}$, on a :

$$\begin{aligned}
 E_{int} &= g \int d\mathbf{r} \left(\frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu + V(r))} + 1} \right)^2 \\
 &= \frac{g}{3\pi^3} (2m\mu_0)^3 r_{max}^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^7 \theta d\theta \\
 &= \frac{1024}{2835\pi^2} \mu_0 \left(\frac{\mu_0}{\omega} \right)^3 k_F a.
 \end{aligned}$$

On obtient alors le paramètre ξ :

$$\xi = \frac{3E_{int}}{2E_{pot}} = \frac{4096}{935\pi^2} k_F a \simeq 0.4439 k_F a. \quad (3.31)$$

La détermination de cette valeur analytique est un bon test pour savoir si la valeur du paramètre d'interaction ξ est correctement calculée à $T = 0$. Afin de rendre compte de l'influence de ce paramètre, on trace (Fig. 3.1) le paramètre ξ pour différentes valeurs de l'interaction et en fonction de la température. Notons qu'il s'agit ici d'un calcul perturbatif, ayant pour contrainte une valeur de a petite, soit une interaction faible, ce cas ne correspond pas non plus au cas Hartree ($U = g\rho$). On remarque que l'on retrouve le résultat analytique à $T = 0$ (Eq. (3.31)), que l'influence de ce paramètre diminue avec la température pour une interaction fixe et augmente avec l'interaction pour une température fixe. Le décalage de la fréquence du mode collectif par rapport au cas sans champ moyen sera donc plus important pour les fortes interactions et les faibles températures, donc les régions où les effets de champ moyen se font le plus ressentir.

3.4.2 Fréquence et amortissement

On procède toujours de la même manière pour obtenir les équations des modes : on injecte la fonction test dans l'équation de Boltzmann linéarisée, avec le potentiel de champ moyen donné par [52] :

$$U(\mathbf{r}) = g\rho(\mathbf{r}) = g[\rho_0(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r})], \quad (3.32)$$

g étant toujours la constante d'interaction, $\rho_0(\mathbf{r})$ est la densité par état de spin à l'équilibre tandis que $\delta\rho(\mathbf{r})$ correspond à l'écart de densité à l'équilibre. Le potentiel effectif est donc la somme du champ moyen U et du potentiel de piège $V_T(\mathbf{r})$.

Afin de comparer aux expériences existantes (par exemple [56, 57, 67]), on considère un piège axialement symétrique avec $\omega_x = \omega_y = \omega_\perp$ et $\omega_z = \lambda\omega_\perp$. Le résultat est donné au premier ordre en ξ car les équations cinétiques ne sont valables que dans la limite $\xi < 1$. L'annulation du déterminant de la matrice, obtenue à partir des différents moments de l'équation de Boltzmann, donne l'équation des modes [52] :

$$\omega[(\omega^2 - \omega_{hd}^2) - i\omega\tau(\omega^2 - \omega_{cl}^2)][(\omega^2 - \omega_{hd+}^2)(\omega^2 - \omega_{hd-}^2) - i\omega\tau(\omega^2 - \omega_{cl+}^2)(\omega^2 - \omega_{cl-}^2)] = 0. \quad (3.33)$$

En général, les solutions de cette équation ont une partie réelle et une partie imaginaire qui déterminent la fréquence et l'amortissement du mode collectif. Les fréquences correspondant au régime hydrodynamique ($\omega\tau \rightarrow 0$) sont notées avec l'indice hd , alors que celles du régime sans collision ($\omega\tau \rightarrow \infty$) ont l'indice cl . Dans le cas d'un piège allongé ($\lambda \ll 1$) qui est celui étudié expérimentalement [56, 57, 67], on obtient pour les modes hydrodynamiques :

$$\omega_{hd+}^2 = \frac{10}{3}\omega_\perp^2(1 + \frac{\xi}{5}) \quad \text{et} \quad \omega_{hd-}^2 = \frac{12}{5}\omega_z^2(1 + \frac{\xi}{20}), \quad (3.34)$$

où $+$ et $-$ correspondent respectivement aux modes axial et transverse. Dans la limite sans collision, on obtient :

$$\omega_{cl+}^2 = 4\omega_\perp^2 \quad \text{et} \quad \omega_{cl-}^2 = 4\omega_\perp^2(1 - \frac{\xi}{4}), \quad (3.35)$$

On peut aussi considérer le cas d'un piège sphérique ($\lambda = 1$) que l'on verra aussi par la suite avec l'inclusion de la matrice T . On obtient alors pour les fréquences des modes collectifs dans le régime hydrodynamique :

$$\omega_{hd+}^2 = 4\omega_\perp^2(1 + \frac{\xi}{4}) \quad \text{et} \quad \omega_{hd-}^2 = 2\omega_\perp^2, \quad (3.36)$$

et dans le régime sans collision :

$$\omega_{cl+}^2 = 4\omega_\perp^2(1 + \frac{\xi}{4}) \quad \text{et} \quad \omega_{cl-}^2 = 4\omega_\perp^2(1 - \frac{\xi}{2}). \quad (3.37)$$

Ces résultats [52] ne sont valables qu'au premier ordre en ξ et restent les premiers résultats pour les décalages de la fréquence du mode collectif par l'inclusion d'un champ moyen. Or, comme nous l'avons vu (Sec. 2.4.2), ce champ moyen de type Hartree Fock ne peut rendre compte du comportement du système pour les fortes interactions.

3.5 Théorème du viriel généralisé

Dans cette section, nous allons dériver une relation entre les quantités à l'équilibre que nous utiliserons dans les sections suivantes (au-delà du champ moyen).

A l'équilibre, on avait déjà établi une équation (3.13) qui était vraie même si $U \neq 0$. Dans le cas du champ moyen $U = g\rho$ de l'approximation de Hartree, en multipliant cette équation par $x p_x^2 p_y^2$ puis en intégrant sur $d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$, on obtient le théorème du viriel [68, 69] :

$$E_{kin} - E_{pot} + 3E_{int}/2 = 0. \quad (3.38)$$

Il est possible de faire la même chose dans le cas d'une fonctionnelle générique $U[\rho]$. On définit les coordonnées $\tilde{\mathbf{r}}$ telles que :

$$\tilde{r}_i = \frac{\omega_i}{\bar{\omega}} r_i, \quad i = x, y, z, \quad \bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} \quad (3.39)$$

pour lesquelles le potentiel de piège $V_T = m\tilde{r}^2\bar{\omega}^2/2$ (et donc par conséquent, aussi la densité et le champ moyen U) est à symétrie sphérique. On trouve alors que le théorème du viriel généralisé est :

$$E_{kin} - E_{pot} - \int d\tilde{\mathbf{r}} \rho_{eq} \tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}} = 0, \quad (3.40)$$

où les énergies cinétique et potentielle sont définies par :

$$E_{kin} \equiv 2 \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_{eq} \frac{p^2}{2m} \quad \text{et} \quad E_{pot} \equiv 2 \int d\mathbf{r} \rho_{eq} V_T. \quad (3.41)$$

Si on définit aussi le paramètre d'interaction :

$$\chi \equiv - \frac{\int d\tilde{\mathbf{r}} \rho_{eq} \tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}}}{E_{pot}}, \quad (3.42)$$

le théorème du viriel peut se mettre sous la forme :

$$\frac{E_{kin}}{E_{pot}} = 1 - \chi. \quad (3.43)$$

Dans le cas d'un champ moyen de Hartree $U = g\rho$, le paramètre se réduit à $\chi = \frac{3}{2} \frac{E_{int}}{E_{pot}} = \xi$, où l'énergie d'interaction est :

$$E_{int} \equiv g \int d\tilde{\mathbf{r}} \rho_{eq}^2, \quad (3.44)$$

et l'on retrouve le résultat déjà connu pour le théorème du viriel.

3.6 Fréquence et amortissement au-delà du champ moyen

Pour obtenir la fréquence et l'amortissement du mode collectif en présence de la self-énergie, on doit appliquer la procédure précédente pour l'équation de Boltzmann linéarisée avec le champ moyen U . Dans ce cas, les équations des modes sont toujours valables mais les fréquences limites des modes sans collision et hydrodynamique sont modifiées. De plus, le temps de relaxation τ doit être calculé en tenant compte de U_{eq} dans la fonction de distribution à l'équilibre. Nous allons présenter, pour chaque mode, les équations des modes obtenues dans le cadre de notre théorie.

3.6.1 Mode de Kohn

On commence par l'oscillation du centre de masse du gaz, appelée mode de Kohn. Expérimentalement, ce mode est utilisé pour déterminer avec une très grande précision la fréquence du piège [70], car c'est une oscillation non amortie à la fréquence du piège quelle que soit l'interaction [71, 72]. Afin de vérifier la consistance de notre modèle, il est important de vérifier que cette propriété est préservée. Dans ce cas, la fonction test est donnée par :

$$\Phi = c_1 x + c_2 p_x. \quad (3.45)$$

En multipliant par x et p_x puis en intégrant sur \mathbf{r} et \mathbf{p} , on remarque que le terme de collision n'intervient pas car $I[x] = I[p_x] = 0$, et on obtient les équations :

$$\begin{cases} \frac{-i\omega}{m\omega_x^2} (N_\uparrow - \frac{C}{3}) c_1 - N_\uparrow c_2 = 0 \\ (N_\uparrow - \frac{C}{3}) c_1 - i\omega m N_\uparrow c_2 = 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

avec

$$N_\uparrow = \int d\tilde{\mathbf{r}} \rho_{eq} \quad (3.47)$$

le nombre d'atomes par état de spin et

$$C = \int d\tilde{\mathbf{r}} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \beta f_{eq} (1 - f_{eq}) \tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}} \quad (3.48)$$

une constante dépendant de l'interaction. Le calcul du déterminant nous donne alors $\omega = \omega_x$, indépendamment de l'interaction. On trouve le même résultat pour les autres directions y et z . La consistance de notre approche est ainsi vérifiée vis-à-vis du mode de Kohn.

3.6.2 Mode ciseaux

Pour le mode ciseaux, la méthode déjà décrite précédemment permet d'obtenir l'équation des modes suivante :

$$\frac{i\omega}{\tau} (\omega^2 - \omega_{h,S}^2) + (\omega^2 - \omega_{c+,S}^2)(\omega^2 - \omega_{c-,S}^2) = 0, \quad (3.49)$$

où $\omega_{h,S}$ et $\omega_{c\pm,S}$ sont respectivement les fréquences limites dans les cas hydrodynamique ($\omega\tau \rightarrow 0$) et sans collisions ($\omega\tau \rightarrow \infty$), et sont données par les relations :

$$\begin{aligned} \omega_{h,S}^2 &= \omega_x^2 + \omega_y^2 \\ \omega_{c\pm,S}^2 &= (\omega_x^2 + \omega_y^2)(1 - \chi/2) \pm \sqrt{4\omega_x^2\omega_y^2(1 - \chi + \chi^2/8) + (\omega_x^4 + \omega_y^4)\chi^2/4} \end{aligned} \quad (3.50)$$

où χ est le paramètre dépendant de l'interaction défini par Eq. (3.42). On remarque que la fréquence limite hydrodynamique ne dépend pas de l'interaction. Dans la limite sans collision, il y a deux modes avec des fréquences différentes correspondant à un champ de vitesse rotationnel ($\omega_{c+,S}$) ou irrotationnel ($\omega_{c-,S}$).

3.6.3 Mode radial quadrupolaire

Pour le mode radial quadrupolaire, l'équation des modes se met sous la forme :

$$i\omega(\omega^2 - \omega_{c,Q}^2) - \frac{1}{\tau}(\omega^2 - \omega_{h,Q}^2) = 0, \quad (3.51)$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega_{c,Q}^2 &= 4\omega_r^2(1 - \chi/2) \\ \omega_{h,Q}^2 &= 2\omega_r^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

La fréquence hydrodynamique est toujours indépendante de l'interaction. Dans l'approximation d'Hartree ($U = g\rho$), le paramètre χ se réduit à $3E_{int}/2E_{pot}$ et les fréquences limites sont en accord avec les résultats déjà obtenus pour ce cas [52].

3.6.4 Mode radial de respiration

Dans le cas du mode radial de respiration, on obtient deux fréquences qui correspondent aux modes axial et radial. Le mode basse fréquence (ω_-) correspond au mouvement selon l'axe z (mode axial), tandis que le mode haute fréquence (ω_+) correspond à un mouvement radial (mode radial). L'équation des modes est alors de la forme :

$$i\omega(\omega^2 - \omega_{c+,B}^2)(\omega^2 - \omega_{c-,B}^2) - \frac{1}{\tau}(\omega^2 - \omega_{h+,B}^2)(\omega^2 - \omega_{h-,B}^2) = 0, \quad (3.53)$$

les fréquences limites ayant pour expression :

$$\omega_{c\pm,B}^2 = \omega_r^2 \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b}}{16 + 25\varphi_1 - 25\chi(1 + \varphi_1)} \quad (3.54)$$

$$\omega_{h\pm,B}^2 = \omega_r^2 \frac{c \pm \sqrt{c^2 + d}}{3[16 + 25\varphi_1 - 25\chi(1 + \varphi_1)]}, \quad (3.55)$$

où les expressions de a , b , c et d sont données en appendice et dépendent de :

$$\chi' = \frac{3}{2E_{pot}} \int d\tilde{r} \rho_{eq}^2 \frac{\partial U_{eq}}{\partial \rho_{eq}}, \quad (3.56)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{5E_{pot}} \int d\tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \rho_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{\tilde{r}^2}{1 + \frac{\partial U_{eq}/\partial \tilde{r}}{m\tilde{\omega}^2 \tilde{r}}}, \quad (3.57)$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{E_{pot}} \int d\tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{\rho_{eq} \tilde{r}}{1 + \frac{\partial U_{eq}/\partial \tilde{r}}{m\tilde{\omega}^2 \tilde{r}}}. \quad (3.58)$$

En l'absence de champ moyen, on a $\chi = \chi' = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$. En définissant le paramètre d'allongement du piège, $\lambda = \frac{\omega_z}{\omega_r}$, les fréquences se réduisent à des expressions déjà connues [52, 64] :

$$\omega_{c\pm,B}^2 = 2\omega_r^2(1 + \lambda^2 \pm \sqrt{1 - 2\lambda^2 + \lambda^4}) \quad (3.59)$$

$$\omega_{h\pm,B}^2 = \frac{\omega_r^2}{3}(5 + 4\lambda^2 \pm \sqrt{25 + 16\lambda^4 - 32\lambda^2}). \quad (3.60)$$

Le cas d'un gaz dans un piège sphérique ($\lambda = 1$), on retrouve alors :

$$\omega_{c,B}^2 = 4\omega_r^2 \quad (3.61)$$

$$\omega_{h+,B}^2 = 4\omega_r^2 \text{ et } \omega_{h-,B}^2 = 2\omega_r^2. \quad (3.62)$$

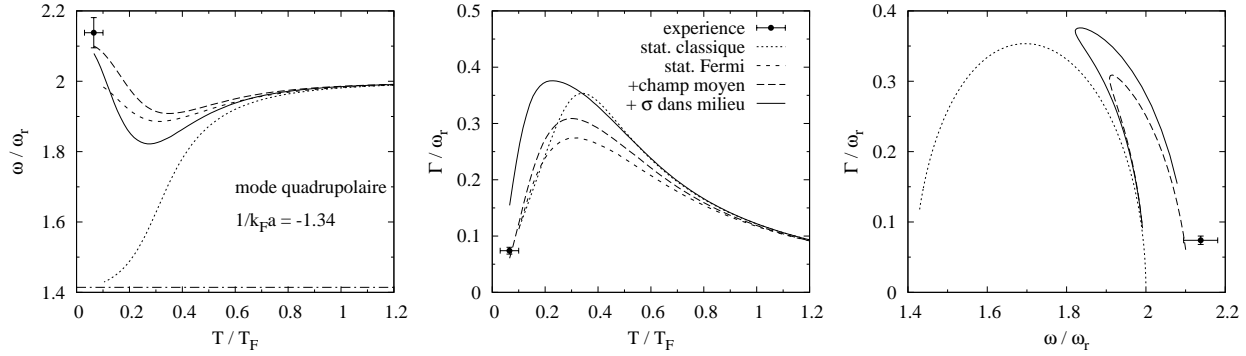


FIG. 3.2 – Fréquence et amortissement du mode radial quadrupolaire pour $1/k_F a = -1.34$. Le point expérimental provient de la référence [70]. De gauche à droite, les courbes représentent la fréquence en fonction de la température, l'amortissement en fonction de la température et l'amortissement en fonction de la fréquence. Chaque ligne est un niveau différent de sophistication du calcul. A partir d'un gaz classique sans champ moyen et une section efficace de diffusion dans le vide (pointillés), on ajoute le principe d'exclusion de Pauli dans le profil de densité à l'équilibre et l'intégrale de collision (petits tirets), puis on inclut le champ moyen U (longs tirets) et enfin la section efficace dans le milieu (trait plein).

3.7 Résultats et discussion

A partir des différents résultats théoriques que nous avons dégagés, nous avons calculé numériquement les quantités physiques telles que la fréquence et l'amortissement en fonction de la température. Dans cette partie, nous allons décrire et commenter les différents résultats obtenus pour chacun des modes en comparaison avec les données expérimentales existantes. Les résultats pour la fréquence et l'amortissement en fonction de la température seront donnés sur les deux premiers graphiques, tandis que le troisième montre l'amortissement en fonction de la fréquence. Cette dernière représentation a été proposée afin de s'affranchir de la température, qui ne peut pas être déterminée facilement dans les expériences. En effet, la mesure expérimentale de la température n'est pas complètement indépendante du modèle théorique utilisé dans l'analyse ! Pour l'instant, dans l'analyse de [31], la méthode introduite par Thomas *et al.* [73] est utilisée, ce qui nécessite entre autres, la connaissance d'un paramètre β déterminant la masse effective à l'unitarité. Par conséquent, en plus d'une erreur statistique dans la détermination de la température, il peut y avoir une erreur systématique non négligeable provenant des incertitudes théoriques.

3.7.1 Mode radial quadrupolaire à $1/k_F a = -1.34$

Dans la première expérience sur le mode radial quadrupolaire du côté BCS du BEC-BCS crossover, le piège a des fréquences $\omega_r = 2\pi \times 370\text{Hz}$ et $\omega_z = 2\pi \times 22\text{Hz}$ et contient $N = 400000$ atomes de lithium (^6Li). Le champ magnétique le plus fort utilisé dans l'expérience correspond à la plus faible interaction ($1/k_F a = -1.34$), qui est la valeur que nous allons considérer ici. La température expérimentale n'est malheureusement pas connue, mais nous la considérerons comme comprise entre la plus basse valeur atteinte par le groupe de Innsbruck $0.03T_F$ [67] et $0.1T_F$, la valeur donnée dans la référence [31].

Le seul point expérimental montre sans ambiguïté la nécessité de l'inclusion du champ moyen car la fréquence mesurée ($\simeq 2.1\omega_r$) se situe clairement au-dessus de la valeur limite

pour un gaz en régime sans collision dans un modèle sans champ moyen ($2\omega_r$). Les barres d'erreurs expérimentales excluent la possibilité d'un rapport de fréquence $\omega = 2\omega_r$. Cette valeur de la fréquence dans le cas d'un couplage faible pour le mode radial quadrupolaire n'a toujours pas été expliquée. Nous allons voir que l'inclusion de notre champ moyen permet d'obtenir une fréquence d'oscillation du mode collectif $\omega > 2\omega_r$ et donc d'expliquer pour la première fois ce résultat expérimental.

Les courbes théoriques (Fig. 3.2) représentent différents niveaux d'approximation dans le calcul. Afin de voir les différentes améliorations de la théorie, nous les incluons les unes après les autres. On commence avec un gaz de fermions classique (pointillés) utilisant une fonction de distribution de Boltzmann pour le calcul du profil de densité. Dans cette approximation, le système a un comportement hydrodynamique ($\omega \rightarrow \sqrt{2}\omega_r$) à faible température et un comportement sans collisions ($\omega \rightarrow 2\omega_r$) pour les températures plus élevées avec un fort amortissement Γ dans le régime intermédiaire. La représentation de Γ en fonction de ω est une courbe similaire à un demi-cercle. Le comportement hydrodynamique à faible température est bien sûr la conséquence de l'absence de blocage de Pauli dans le terme de collision, ce qui est clairement en contradiction avec la fréquence mesurée.

Afin de résoudre ce problème, on inclut l'effet de la statistique de Fermi (petits tirets). Pour cela, on utilise la fonction de distribution de Fermi, ce qui a pour conséquence d'ajouter le blocage de Pauli dans le terme de collision. A cause du facteur de blocage de Pauli, le taux de collisions décroît vers zéro à basse température, par conséquent le système se retrouve dans un régime sans collision à la fois à la limite des faibles et hautes températures. Le plus fort amortissement, donc la plus faible fréquence, est atteint pour une température de $\simeq 0.3T_F$. Comme il n'y a pas de champ moyen, Γ et ω ne dépendent que du paramètre τ , la courbe dans le plan $\omega - \Gamma$ est sur la même courbe que pour le cas classique, mais seule la partie correspondant aux grandes valeurs de τ est décrite. Bien que la fréquence à faible température soit maintenant en meilleur accord avec les données expérimentales, la valeur obtenue est toujours trop faible ($\frac{\omega}{\omega_r} \leq 2$).

La troisième étape consiste à ajouter le champ moyen. La fonction de distribution contient donc le terme de champ moyen et les termes U_{eq} et δU sont inclus dans l'équation de Boltzmann. Néanmoins, on garde encore la section efficace libre. Nos calculs sont limités à une température de $0.06T_F$ correspondant à la température critique du système. Le champ moyen n'a pas un effet important sur l'amortissement mais augmente la fréquence, particulièrement à basse température où elle devient supérieure à la valeur limite théorique ($2\omega_r$) d'un gaz en régime sans collision et en l'absence de champ moyen. Les fréquences et amortissement aux températures les plus basses sont désormais en très bon accord avec les valeurs mesurées. On remarque aussi la modification qualitative du "cercle" hydrodynamique.

Enfin, on remplace la section efficace libre par celle dans le milieu (trait plein). Malheureusement, l'accord entre le résultat théorique et la fréquence et l'amortissement mesurés à basse température devient moins bon. L'amortissement est trop important d'un facteur deux tandis que la fréquence est diminuée. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul est limité à des températures supérieures à $0.06T_F$, alors qu'il est possible que la température expérimentale soit plus basse. Par exemple, la présence d'une faible région superfluide au centre du piège ne contredira pas l'observation de la fréquence limite sans collision. En extrapolant la courbe de l'amortissement obtenue vers des températures plus basses, il semblerait que le résultat avec la section efficace dans le milieu ne soit pas incohérent avec l'expérience. Pour éclaircir ce point, il serait nécessaire d'avoir d'autres points expérimentaux.

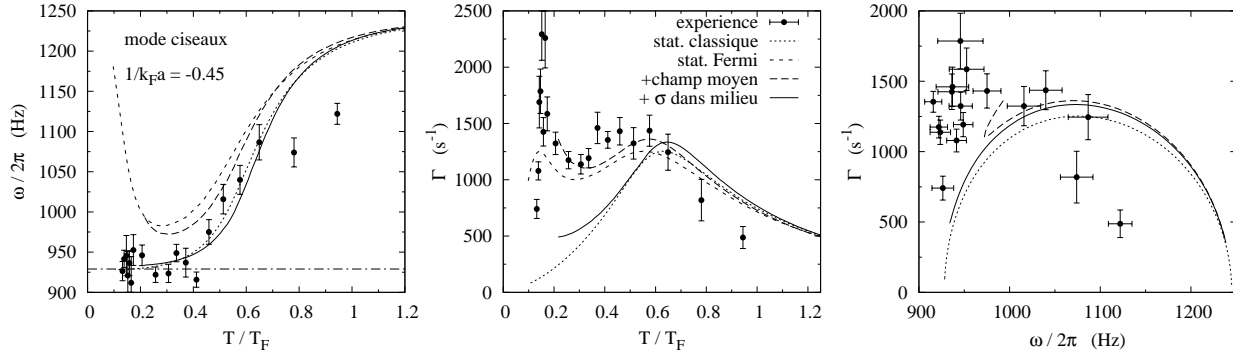


FIG. 3.3 – De même que Fig. 3.2, mais pour le mode ciseaux et $1/k_F a = -0.45$, les points de données viennent de la référence Ref. [31].

3.7.2 Mode ciseaux à $1/k_F a = -0.45$

Après le mode radial quadrupolaire, le groupe de Innsbruck a étudié le mode ciseaux à $1/k_F a = -0.45$ et à l'unitarité. Dans cette expérience, le piège a des fréquences $\omega_x = 2\pi \times 830$ Hz, $\omega_y = 2\pi \times 415$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 22$ Hz et contient $N = 400000$ atomes de lithium (^6Li). La fréquence et l'amortissement ont alors été mesurés en fonction de la température. De même que pour la section précédente, on trace la fréquence, l'amortissement et le cercle hydrodynamique (Fig. 3.3). La signification de chaque courbe reste la même.

Le premier résultat, déjà mentionné dans la littérature [49] est que l'on peut assez bien reproduire les fréquences observées avec la statistique classique (pointillés) même pour des températures beaucoup plus faibles que la température de Fermi T_F . A faible température, on observe la fréquence hydrodynamique ($\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = 2\pi \times 928$ Hz), puis la fréquence du régime sans collision ($\omega_x + \omega_y = 2\pi \times 1245$ Hz) lorsqu'on augmente la température. Néanmoins, la fréquence à haute température n'est pas en bon accord, comme pour toutes les étapes suivantes de nos calculs. Ce désaccord peut provenir d'effets d'anharmonicité du piège à haute température ou de la nécessité de prendre en compte les moments d'ordre supérieurs dans la méthode des moments. Enfin, l'amortissement n'est pas du tout reproduit, ce qui confirme la nécessité d'améliorer le modèle.

En fait, comme pour le mode radial quadrupolaire, l'absence de blocage de Pauli conduit à un taux de collisions élevé, ce qui reproduit parfaitement le comportement hydrodynamique du gaz. L'inclusion du blocage de Pauli (tirets courts) réduit fortement ce taux de collisions et donc augmente l'amortissement à basse température. A part un pic pour $T/T_F \simeq 0.15$ probablement dû à la transition entre phase superfluide et phase normale, l'accord avec l'amortissement mesuré est très bon. Remarquons que, comme l'interaction est plus importante que dans le cas du mode radial quadrupolaire, le régime sans collision n'est pas atteint, même si la courbe tend à rejoindre cette limite aux basses températures. Expérimentalement, cette remontée de la fréquence n'est pas observée car le système est déjà dans la phase superfluide. Donc la fréquence reste proche de la fréquence hydrodynamique même si le taux de collisions est faible. Cet effet ne peut pas être décrit à l'aide de l'équation de Boltzmann qui n'inclut pas la superfluidité. Enfin, aux hautes températures, la fréquence obtenue n'est pas aussi bonne que celle trouvée pour le cas d'une statistique classique. Ce problème aux hautes températures est certainement la conséquence d'effets d'anharmonicité. En effet, plus la température est élevée, plus les particules peuvent ressentir un piège anharmonique. Ces effets ne sont pas traitables dans notre première approche (méthode des moments d'ordre

2), mais cette première constatation justifie déjà la nécessité de décrire l'évolution complète du gaz par un traitement numérique de l'équation de Boltzmann.

L'inclusion du champ moyen (longs tirets) donne une légère réduction de la fréquence tandis que l'amortissement est légèrement augmenté, améliorant l'accord avec les données. Comme notre calcul est limité à la phase normale, les courbes sont restreintes aux températures supérieures à $\simeq 0.2T_F$. Les fréquences sont désormais bien reproduites pour des températures supérieures à $0.3T_F$, alors qu'elles sont légèrement trop hautes entre $0.2T_F$ et $0.3T_F$. L'amortissement est en excellent accord avec les données pour toutes les températures supérieures à T_C .

Finalement, l'inclusion de la section efficace dans le milieu (trait plein) est surprenante ; l'accord avec les données, en particulier pour l'amortissement, est totalement perdu. Les résultats sont très proches de ceux du gaz classique, similaires à ceux obtenus pour la viscosité de cisaillement d'un gaz à l'unitarité [49] et pour les différents modes collectifs à l'unitarité [54]. Cet effet provient de l'augmentation de la section efficace qui annule le blocage de Pauli. Apparemment, ce résultat est le signe d'un problème fondamental dans la théorie. Initialement, nous avons entrevu deux possibilités : soit l'approximation de quasiparticule est trop grossière (bien que les profils de densité QP et NSR coïncident), soit il y a de fortes corrections dues à la dépendance en énergie et aux moments de la self-énergie. Même la validité de l'équation de Boltzmann peut être remise en cause : l'approximation de la matrice T peut conduire à un temps de corrélation important, ce qui impliquerait de prendre en compte la mémoire du système à travers des processus de Markov [74]. De plus, la section efficace dans le milieu pour un système proche de la température critique T_C augmente fortement. Une telle augmentation peut conduire à une forte diminution du libre parcours moyen de la particule et donc sortir du domaine d'application de l'équation de Boltzmann. Enfin, comme nous le verrons par la suite (Sec. 4.6), on peut aussi remettre en cause la validité de la méthode des moments d'ordre 2.

3.7.3 Modes collectifs dans la limite unitaire

Nous regardons maintenant les résultats pour les modes collectifs dans la limite unitaire ($1/k_F a = 0$). Nous allons à nouveau comparer avec les résultats expérimentaux obtenus par le groupe de Innsbruck pour le mode ciseaux [31] et pour les modes radial quadrupolaire et de respiration [54]. Les courbes sont représentées sur la figure (Fig. 3.4).

Les paramètres utilisés pour l'étude du mode ciseaux sont les mêmes que dans le cas $1/k_F a = -0.45$. Le mode quadrupolaire est étudié dans un piège axialement symétrique avec $\omega_r = 2\pi \times 1100$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 26$ Hz et $N = 600000$ atomes de lithium (^6Li), tandis que pour le mode de respiration les fréquences du piège sont $\omega_r = 2\pi \times 1800$ Hz, $\omega_z = 2\pi \times 326$ Hz avec toujours le même nombre $N = 600000$ d'atomes de lithium.

Dans le cas du mode ciseaux, la forme qualitative de la fréquence et de l'amortissement en fonction de la température sont bien reproduits par tous les niveaux d'approximation du calcul. Comme dans le cas $1/k_F a = -0.45$, les données restent proches de la fréquence hydrodynamique à basse température à cause de la superfluidité qui n'est pas incluse dans notre théorie. Pour des températures au-dessus de $T_C \simeq 0.3T_F$, les fréquences sont bien reproduites par le calcul incluant le champ moyen et la section efficace dans le milieu. Néanmoins, comme dans le cas $1/k_F a = -0.45$, l'inclusion de la section efficace dans le milieu diminue l'amortissement beaucoup plus que cela n'est observé expérimentalement. Par conséquent, l'amortissement est mieux reproduit dans le cas avec champ moyen et section

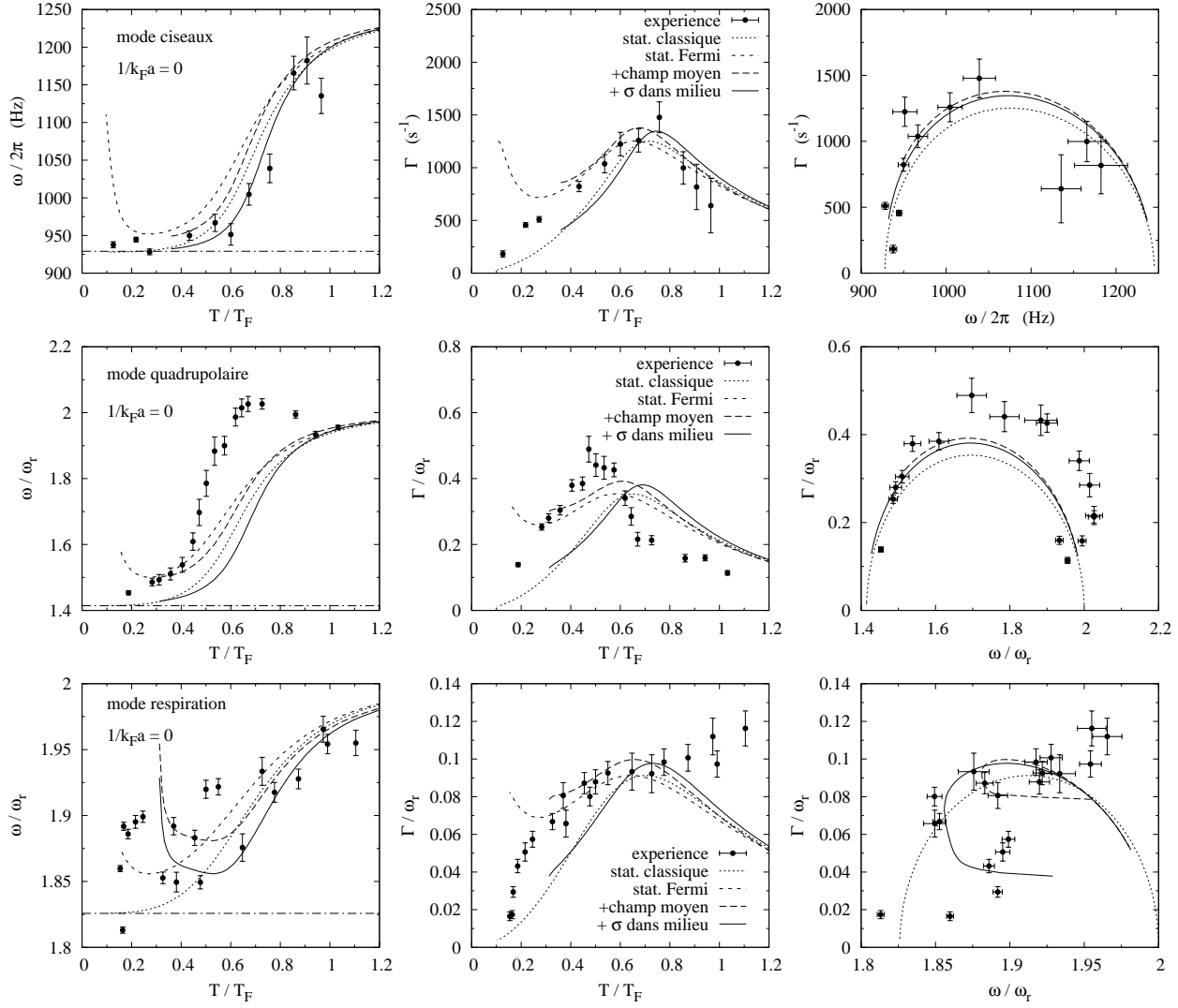


FIG. 3.4 – De même que Fig. 3.2, mais (de haut en bas) pour le mode ciseaux,, le mode radial quadrupolaire et le mode radial de respiration dans la limite unitaire ($1/k_F a = 0$). Les points expérimentaux proviennent de la référence [31] pour le mode ciseaux et de la référence [54] pour les modes radial quadrupolaire et radial de respiration.

efficace libre. Si l'on regarde le cercle hydrodynamique, ces deux dernières approximations pourraient être compatibles avec les données expérimentales.

Pour le mode radial quadrupolaire, on doit admettre que la différence entre les différentes approximations sont plus petites que leurs écarts avec les données expérimentales. Par conséquent, aucune de ces approximations n'est satisfaisante pour décrire toutes les données, le champ moyen a notamment un effet très réduit. L'inclusion de la section efficace dans le milieu donne un résultat encore plus éloigné de celui observé expérimentalement. Il semblerait que dans l'expérience, tout se passe comme si la transition entre régime hydrodynamique et sans collision avait lieu pour une température beaucoup plus faible que dans nos résultats théoriques. De même dans le cercle hydrodynamique, où les résultats expérimentaux semblent portés par une courbe bien définie, nos résultats sont loin de ces données. Par conséquent, d'autres études théoriques sont nécessaires pour éclaircir ce point.

Pour le mode radial de respiration, il est difficile de tirer des conclusions des figures. Comme pour le mode ciseaux, les résultats obtenus avec champ moyen et section efficace libre donnent une description satisfaisante pour l'amortissement entre $T \simeq 0.3T_F$ et $0.8T_F$, alors qu'avec la section efficace dans le milieu, l'amortissement est beaucoup plus faible. La grande dispersion des données pour la fréquence ne rend pas l'expérience compatible avec les modèles théoriques, sauf pour la montée subite de la fréquence lorsque la température décroît vers T_C . Cette remontée de la fréquence théorique ne provient pas d'une diminution du taux de collisions qui mènerait à un comportement sans collision mais d'une croissance soudaine du paramètre χ' . Cet effet est un problème de l'approximation quasiparticule car il a lieu quand le profil de densité devient plat proche de $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, ce qui se passe pour les densités quasiparticules proches de T_C mais pas pour les densités NSR.

3.7.4 Conclusion

Ainsi, nous avons étudié les modes collectifs d'un gaz de fermions froids décrit par l'équation de Boltzmann incluant les effets du milieu dans l'approximation des quasiparticules. À partir de l'approximation de la matrice T , on évalue numériquement la fréquence et l'amortissement des différents modes collectifs en fonction de la température et pour différentes valeurs de l'interaction $1/k_F a$. Avec cette description du système, nous avons pu expliquer pour la première fois le décalage observé pour le mode quadrupolaire dans la phase normale sans collision à faible couplage ($1/k_F a = -1.34$). Cependant, à forte interaction et notamment près de la limite unitaire, la section efficace dans le milieu augmente fortement, fragilisant la validité de notre approche. De plus, les fréquences expérimentales sont difficilement interprétables rendant encore plus compliquée la comparaison avec notre modèle.

Cette première approche semi-analytique, dans la mesure où les éléments concernant le modèle de champ moyen et le taux de collisions sont évalués numériquement tandis que l'on peut déterminer analytiquement les équations des modes par la méthode des moments, a permis de déterminer les fréquences et les amortissements des modes collectifs. L'une des premières idées pour améliorer cette étude a été de regarder la dépendance en impulsion et énergie de la self-énergie Σ que nous avons négligée Eq. (2.28). Néanmoins, l'application numérique de la dépendance en énergie et impulsion de la self-énergie [50] a justifié la validité de notre approche.

L'analyse des résultats montre notamment qu'il existe certainement des effets d'anharmonicité aux hautes températures. Pour décrire ces effets, il faut décrire précisément le potentiel de piège, c'est-à-dire utiliser une fonction non harmonique qui prend en compte

notamment la largeur gaussienne du laser. Cette étude n'est plus possible analytiquement avec la méthode des moments, car cette dernière n'est pas traitable par la méthode des moments. Un autre champ d'étude serait d'essayer d'appliquer notre traitement à la fois pour des gaz asymétriques ($\rho_{\uparrow} \neq \rho_{\downarrow}$) et dans la phase superfluide.

Afin d'aller au-delà du traitement actuel et de décrire plus précisément la situation expérimentale, il faut décrire complètement l'évolution temporelle du gaz par l'équation de Boltzmann pour déterminer les fréquences et amortissement des modes collectifs. Nous avons donc décidé de réaliser une simulation numérique de l'équation de Boltzmann, pour un système dans un piège harmonique ou anharmonique et pouvant inclure les effets de milieu que l'on a déjà évalués. Un autre avantage de ce traitement est qu'il nous permettra de tester la validité de la méthode des moments.

Chapitre 4

Résolution numérique de l'équation de Boltzmann

Afin de décrire le plus précisément possible la dynamique du gaz de fermions et de répondre aux problèmes soulevés par la résolution semi-analytique de l'équation des modes, nous avons entrepris de résoudre l'équation de Boltzmann numériquement par la méthode des particules tests. Un objectif majeur de cette étude est la volonté de valider notre approche avec la méthode des moments décrite dans les sections précédentes, ce travail a fait l'objet d'une publication soumise [75]. Une autre volonté est de déterminer les effets d'anharmonicité dans les fréquences des modes collectifs pour des températures proches ou supérieures à la température de Fermi du gaz, ce qui était impossible par l'approche analytique de la méthode des moments.

4.1 Description physique du problème

Afin de résoudre numériquement l'équation de transport des atomes dans le gaz, on commence par décrire dans cette partie les différents aspects physiques qui interviennent.

4.1.1 Méthode des particules tests

L'équation de Boltzmann pour une fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:

$$\dot{f} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = -I[f] \quad (4.1)$$

comprend un membre de gauche décrivant la propagation d'une particule et un membre de droite $I[f]$ qui décrit les collisions entre les particules.

Comme nous l'avons déjà vu (Sec. 3.1), la fonction de distribution est reliée à la densité par état de spin par l'équation :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (4.2)$$

et l'on considérera qu'à l'équilibre les fonctions de distribution des deux états de spin sont les mêmes, soit : $f_{\uparrow} = f_{\downarrow} = f$. Cette hypothèse reste vraie dans la limite où le potentiel de piège et l'opérateur d'excitation ne dépendent pas du spin, ce qui sera toujours le cas dans notre étude.

On commence par résoudre le cas sans terme de collision qui correspond à l'équation de Vlasov. La méthode numérique des particules tests consiste alors à remplacer la fonction de distribution continue par la fonction de distribution discrète suivante :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2N_{test}} \sum_{i=1}^{NN_{test}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \quad (4.3)$$

où N_{test} correspond au nombre de particules tests par particule et N est le nombre de particules du système considéré. Ainsi, on augmente artificiellement le nombre de particules du système qui devient NN_{test} . Même si le système est décrit par des particules ponctuelles, on obtient une meilleure description de l'espace des phases. Les observables physiques sont alors évaluées plus précisément. Néanmoins, pour restaurer la physique du problème, il faut diviser toutes les grandeurs physiques extensives par N_{test} . Ceci nous permet d'exprimer la valeur moyenne d'une observable à une particule quelconque $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$:

$$\langle F \rangle = \frac{2}{N} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) F(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{NN_{test}} \sum_{i=1}^{NN_{test}} F(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i). \quad (4.4)$$

La fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ contient un facteur $1/2$ car NN_{test} particules tests représentent $N/2$ atomes d'un spin donné.

4.1.2 Equations du mouvement

A partir de la distribution discrète de particules tests (Eq. (4.3)), on peut calculer $\nabla_r f$, $\nabla_p f$ et \dot{f} ; l'équation de Boltzmann est alors satisfaite si :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \nabla_p \xi_p \\ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\nabla_r \xi_p \end{cases} \quad (4.5)$$

qui sont donc les équations du mouvement (de Hamilton) des particules, où, comme dans notre précédente étude (Sec. 2.3.1), ξ_p dépend de \mathbf{r} dans l'approximation de densité locale et est donné par la relation de dispersion :

$$\xi_p(\mathbf{r}) = \xi_p^0(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) = p^2/2m + V_T(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) - \mu_0, \quad (4.6)$$

$\xi_p^0(\mathbf{r})$ étant l'énergie d'une particule libre dans le piège, $U(\mathbf{r})$ le champ moyen que nous avons décrit dans les sections précédentes et μ_0 le potentiel chimique au centre du piège. Bien évidemment, une grande partie de la difficulté du traitement numérique sera d'inclure le champ moyen dans ces équations du mouvement. Ainsi, dans le cas le plus général, les équations du mouvement se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_r [V_T(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})]. \end{cases} \quad (4.7)$$

On voit donc que la méthode des particules tests a pour conséquence de remplacer le système initial de N particules dont l'évolution temporelle est décrite par la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ vérifiant l'équation de Vlasov par un système de NN_{test} particules tests se propageant individuellement selon les lois de la mécanique classique. Dans toute l'étude numérique que nous ferons par la suite, on négligera le champ moyen $U(\mathbf{r})$.

4.1.3 Propagation des particules

La propagation des particules correspond au membre de gauche de l'équation de Boltzmann dont l'étude se ramène à la résolution du système d'équations (Eqs. (4.7)). Ce système étant du premier ordre, il suffit de se donner une distribution initiale pour le résoudre. Comme on étudie un gaz de fermions piégés, la distribution en impulsion est donnée par la statistique de Fermi d'un gaz de fermions à l'équilibre à une température T , le potentiel chimique μ étant calculé à partir du nombre de particules piégées. De même, pour une température et un potentiel chimique donnés, la distribution en position est déterminée par le profil de densité dans le cadre de l'approximation LDA.

En pratique, il est très difficile d'initialiser un gaz exactement dans son état d'équilibre car on génère de façon aléatoire les positions et impulsions sur un nombre fini de particules, ce qui implique une dispersion. Or, comme l'énergie du système est conservée, l'existence d'une dispersion entre la distribution d'équilibre et la distribution initiale a pour conséquence une légère oscillation des variables physiques autour de la position d'équilibre théorique du gaz. Nous verrons plus tard (Sec. 4.2.6) qu'il est cependant possible d'optimiser les paramètres numériques afin d'obtenir un écart à l'équilibre tel que cet effet numérique soit négligeable.

4.1.4 Le terme de collision

La fonctionnelle apparaissant dans le membre de droite de l'équation de Boltzmann est l'intégrale collisionnelle que nous avons déjà décrite (Sec. 3.1). Ce terme décrit les collisions entre atomes de spins opposés et dépend de la section efficace différentielle :

$$I[f] = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| [f f_1 (1 - f')(1 - f'_1) - f' f'_1 (1 - f)(1 - f_1)], \quad (4.8)$$

où \mathbf{p} et \mathbf{p}_1 (respectivement \mathbf{v} et \mathbf{v}_1) sont les moments (resp. vitesses) entrants, \mathbf{p}' et \mathbf{p}'_1 les moments sortants. L'angle solide Ω est, pour le premier terme de l'intégrand, formé par le moment relatif entrant $\mathbf{p} - \mathbf{p}_1$ et sortant $\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1$ des deux atomes. On a noté les fonctions de distribution telles que $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, $f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t)$, $f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t)$, etc. Les facteurs du type $(1 - f)$ sont absents dans le cas de la statistique de Boltzmann : ils sont une conséquence de la statistique de Fermi qui assure qu'un atome ne peut pas diffuser vers un état déjà occupé. Ce blocage de Pauli peut conduire à une forte réduction du taux de collisions, spécialement aux basses températures (Sec. 4.5.2).

Dans toute cette partie nous considérons le cas d'une diffusion uniquement *via* des ondes s , pour laquelle la section efficace est isotrope, donc :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma}{4\pi}. \quad (4.9)$$

En principe, la section efficace est, comme nous l'avons déjà vu (Sec. 2.5), modifiée par les effets de milieu. Or, l'effet principal sur la fréquence et l'amortissement d'un mode provenait de la statistique de Fermi (Sec. 3.7). Dans un premier temps, nous allons donc chercher à reproduire ces effets avec un code numérique sans tenir compte d'un éventuel champ moyen. Par conséquent, nous considérerons ici le cas d'une section efficace libre, qui est la section efficace de diffusion de deux atomes de spins opposés dans le vide :

$$\sigma = \frac{4\pi a^2}{1 + (qa)^2}, \quad (4.10)$$

avec $q = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|/2 = |\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1|/2$.

4.1.5 Le taux de collisions

La plupart des tests numériques que nous effectuerons par la suite sont indépendants du nombre de collisions. Afin de vérifier que nous reproduisons également correctement cet aspect, nous pouvons considérer le taux de collision théorique :

$$\dot{N}_{coll} = \int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| f f_1 (1 - f')(1 - f'_1). \quad (4.11)$$

En notant $\tilde{N} = NN_{test}$, cette quantité peut s'exprimer par :

$$\dot{N}_{coll} = \frac{N}{\tilde{N}} \dot{\tilde{N}}_{coll}, \quad (4.12)$$

où $\dot{\tilde{N}}_{coll}$ est le nombre de collisions subies par l'ensemble des particules tests par unité de temps.

Bien qu'à l'équilibre l'effet total des collisions soit nul, le taux de collisions est un bon test pour la simulation car il peut être comparé avec le résultat exact. En effet, on peut évaluer ce taux de collisions avec ou sans blocage de Pauli à partir de l'Eq. (4.11) :

$$\begin{aligned} \dot{N}_{coll,eq} &= \int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| f f_1 (1 - f')(1 - f'_1) \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{\sigma}{4\pi} \frac{2q}{m} \int d\Omega \frac{1}{4(2\pi)^6} \frac{1}{\cosh \beta(E - \mu) + \cosh \beta \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m}} \frac{1}{\cosh \beta(E - \mu_0) + \cosh \beta \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}'}{2m}} \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{2q\sigma(q)}{4m(2\pi)^6} \left(\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{\cosh \beta(E - \mu) + \cosh \beta \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m}} \right)^2 \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{2q\sigma(q)}{4m(2\pi)^6} \left(\frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y du \frac{1}{\cosh X + \cosh u} \right)^2 \\ &= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{2q\sigma(q)}{m(2\pi)^6} \left(\frac{\tanh^{-1}(\tanh \frac{X}{2} \tanh \frac{Y}{2})}{Y \sinh X} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^4} \int d\mathbf{r} \int k^2 dk \int q^2 dq \frac{2q}{m} \sigma(q) \left(\frac{\tanh^{-1}(\tanh \frac{X}{2} \tanh \frac{Y}{2})}{Y \sinh X} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

où l'on a posé successivement $\mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_1$, $\mathbf{q} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)/2$, $z = \cos \theta$, $X = \beta(E - \mu)$, $Y = \beta \frac{kq}{2m}$ et $u = Yz$. La première étape du calcul a déjà été effectuée lors de la détermination du temps de relaxation τ (Annexe A). Dans la seconde étape, il y a une intégrale sur l'angle solide de \mathbf{q} et une sur l'angle solide de \mathbf{q}' que l'on transforme en un carré de la même intégrale. Il reste alors une intégrale sur $|\mathbf{q}|$, mais puisque le reste ne dépend plus de l'angle, on peut l'écrire comme une intégrale sur $\frac{dq}{4\pi}$. Afin de faire des vérifications, il est aussi intéressant

de comparer le taux total de collisions autorisées et bloquées avec le résultat exact. Ainsi, si l'on ne tient pas compte du blocage de Pauli, c'est-à-dire si l'on néglige dans l'Eq. (4.11) le terme $(1 - f')(1 - f'_1)$, le taux de collisions devient :

$$\begin{aligned}
\dot{N}_{coll,eq}^{(+blocked)} &= \int d\mathbf{r} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| f f_1 \\
&= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{q\sigma(q)}{m(2\pi)^6} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{e^{-\beta(E-\mu)}}{\cosh \beta(E-\mu) + \cosh \beta \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m}} \\
&= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{q\sigma(q)}{m(2\pi)^6} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y du \frac{e^{-X}}{\cosh X + \cosh u} \\
&= \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} \frac{2q\sigma(q)}{m(2\pi)^6} \frac{\tanh^{-1}(\tanh \frac{X}{2} \tanh \frac{Y}{2})}{Y e^X \sinh X} \\
&= \frac{1}{4\pi^4} \int d\mathbf{r} \int k^2 dk \int q^2 dq \frac{2q}{m} \sigma(q) \frac{\tanh^{-1}(\tanh \frac{X}{2} \tanh \frac{Y}{2})}{Y e^X \sinh X}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Avec un potentiel de piège à symétrie sphérique ou harmonique, on peut réduire l'intégration spatiale à une seule dimension. Les trois intégrales restantes du taux de collisions théorique sont alors déterminées avec un algorithme de Monte Carlo. Cette donnée théorique sera à comparer avec la valeur obtenue pour le taux de collisions avec et sans blocage de Pauli de la simulation de l'équation de Boltzmann (Sec. 4.5.1).

4.1.6 Le potentiel de piège

Expérimentalement, les atomes de Lithium sont piégés par des lasers et des champs magnétiques (piège magnéto-optique) [29]. Le piège est purement optique selon les directions x et y où le confinement est plus important. Dans la direction z , le confinement est à la fois optique et magnétique. Même si l'influence du confinement optique des particules dans la direction z est bien moins importante, il est nécessaire d'en tenir compte pour reproduire correctement les fréquences du piège. Ainsi, on peut écrire le potentiel de piège sous la forme [40] :

$$V(x, y, z) = V_{max} \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} e^{-\frac{2}{w_0^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} (x^2 + y^2)} \right) + \frac{1}{2} m \omega_{z,mag}^2 z^2 \quad (4.15)$$

où w_0 correspond à la largeur minimale du faisceau laser selon les directions x et y , V_{max} est l'énergie potentielle optique maximale et z_0 est la longueur de Rayleigh :

$$z_0 = \pi \frac{w_0^2}{\lambda}. \quad (4.16)$$

Expérimentalement, seules les fréquences du piège ω_x , ω_y , ω_z , le minimum du waist du laser w_0 et la longueur d'onde du laser λ sont connus. Il faut donc les relier aux valeurs utiles V_{max} et z_0 . On remarque que pour un fort confinement optique, on peut approximer au premier ordre la partie optique du potentiel par un piège harmonique. Dans le cas $\frac{x}{w_0}, \frac{y}{w_0}, \frac{z}{z_0} \ll 1$, on obtient alors :

$$V_{opt}(x, y, z) - V_{max} = \frac{2}{w_0^2} V_{max} (x^2 + y^2) + \frac{V_{max}}{z_0^2} z^2 \equiv \frac{1}{2} m \omega_r^2 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \quad (4.17)$$

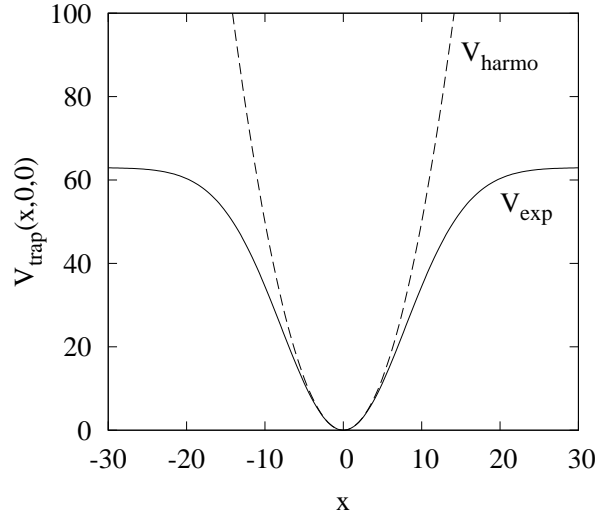


FIG. 4.1 – Représentation, selon l'axe x , du potentiel de piège réel utilisé expérimentalement (V_{exp}) comparé au potentiel harmonique classique (V_{harmo}). Les particules les plus énergétiques pourront aller plus haut dans le piège et "verront" plus les anharmonicités du piège. Les figures correspondent aux données numériques de l'expérience de Innsbruck [40] dans les unités de l'oscillateur harmonique.

et on en déduit :

$$\begin{cases} V_{max} = \frac{m\omega_0^2\omega_r^2}{4} \\ z_0 = \sqrt{\frac{2V_{max}}{m\omega_z^2}} \end{cases} \quad (4.18)$$

Les paramètres V_{max} et z_0 sont alors connus. Le potentiel selon l'axe z est la somme du potentiel optique et magnétique, donc $\omega_z^2 = \omega_{z,opt}^2 + \omega_{z,mag}^2$. La fréquence totale du piège ω_z^2 est donnée par l'expérience alors que la fréquence optique peut être déterminée avec la formule de Rayleigh $\omega_{z,opt} = \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \sqrt{\frac{2V_{max}}{m}}$. La fréquence magnétique sera alors obtenue par $\omega_{z,mag}^2 = \omega_z^2 - \omega_{z,opt}^2$. Numériquement $\frac{\omega_{z,opt}}{\omega_z} \simeq 4.10^{-3}$, ce qui confirme que le confinement selon z vient surtout du potentiel magnétique.

4.2 Résolution numérique

Dans cette partie, on aborde le problème de la résolution numérique des équations de transport dans l'espace des phases. Plus précisément, il s'agit ici d'une modélisation numérique du système étudié, la résolution étant basée sur les approximations que l'on a vues précédemment (Sec. 4.1). La formulation du problème à N-corps quantique n'intervient ici que dans la définition de la section efficace et du champ moyen car les trajectoires sont bien définies, contrairement à une description totalement quantique (qui interdit de connaître exactement à la fois la position et l'impulsion). Néanmoins, même si le système est assimilé à un système classique d'atomes en interaction, les positions et impulsions peuvent être définies en terme d'appartenance à des cellules de l'espace des phases de volume h^3 . Cette incertitude permet alors de tenir compte du principe d'exclusion de Pauli.

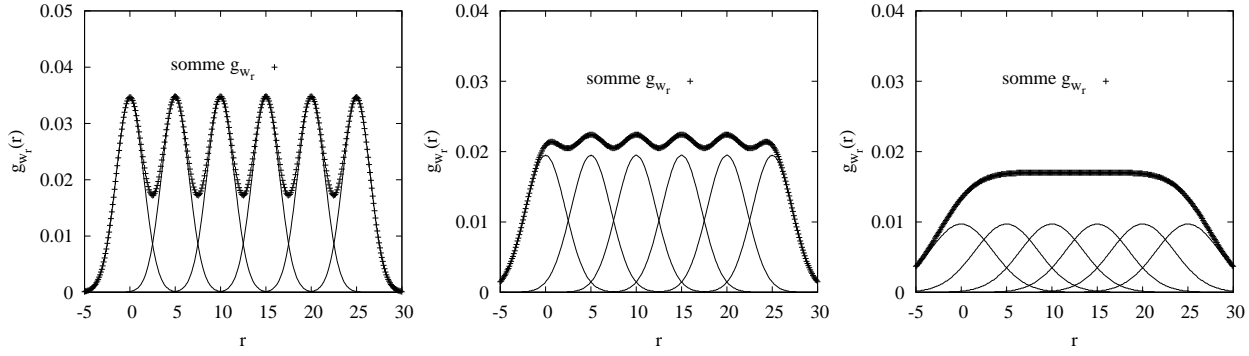


FIG. 4.2 – Représentation des gaussiennes pour différentes valeurs de la largeur w_r . Le profil de densité devient progressivement plat, on évite ainsi les discontinuités dans la description de l'espace des phases.

4.2.1 Extension finie

Pour explorer complètement l'espace des phases, une infinité de particules tests serait nécessaire. En pratique, nous sommes obligés d'en avoir un nombre fini, ce qui réduit la description de l'espace des phases. De plus, l'utilisation de pics de Dirac pour décrire une particule n'est pas satisfaisant car cela mène à une densité non définie. Il est possible d'éviter de tels problèmes en donnant une extension finie aux particules tests. Dans cette approche, la fonction de distribution n'est plus déterminée par un produit de fonction de Dirac en \mathbf{r}_i et \mathbf{p}_i , mais par des gaussiennes ayant une extension finie, centrées sur ces valeurs \mathbf{r}_i et \mathbf{p}_i . La fonction de distribution (Eq. (4.3)) est donc de la forme :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2N_{test}} \sum_{i=1}^{NN_{test}} (2\pi)^3 g_{w_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) g_{w_p}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \quad (4.19)$$

avec

$$g_{w_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}w_r)^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2}{w_r^2}\right) \quad (4.20)$$

et

$$g_{w_p}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}w_p)^3} \exp\left(-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i)^2}{w_p^2}\right). \quad (4.21)$$

Les largeurs des gaussiennes w_r et w_p doivent être adaptées de manière à reproduire correctement la densité locale (w_r) et le taux de collisions (w_p), mais sans changer la structure de la fonction de distribution f . Bien sûr, w_r et w_p doivent satisfaire $w_r \ll R_{TF}$ et $w_p \ll p_F$ où R_{TF} et p_F sont respectivement le rayon de Thomas-Fermi et le moment de Fermi.

A titre d'exemple, on représente (Fig. 4.2), les gaussiennes pour chaque particule ainsi que leur somme correspondant à la fonction de distribution. On remarque qu'il est nécessaire d'avoir une largeur minimale des gaussiennes représentant les particules pour décrire continûment le système. En pratique, cette largeur dépend de la distance moyenne entre particule et détermine donc la densité du gaz. Une adaptation précise et continue du profil de densité devient très importante lorsque l'on ajoute les effets de milieu où il est nécessaire d'évaluer la densité en tous les points du gaz d'atomes. Une incertitude sur la valeur numérique de la densité locale se répercuterait sur les effets de milieu et la dynamique du gaz ne serait plus décrite correctement.

4.2.2 Calcul du terme de collision

Afin de déterminer numériquement le terme de collision, on ne calcule pas toutes les intégrales du terme $I[f]$ mais on détermine simplement, à chaque pas de temps, les collisions susceptibles d'avoir lieu à partir de considérations géométriques pour chaque paire de particules.

Tout d'abord, on regarde l'instant d'approche minimale entre deux particules et la distance associée. Si la particule i est repérée dans l'espace par un vecteur \mathbf{r}_i , on définit, pour une collision entre les particules 1 et 2, le vecteur $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$. Pendant le pas de temps Δt la propagation est approximativement libre (le potentiel de piège n'est pas pris en compte pour déterminer t_{min}). Donc, si l'on note $\Delta\mathbf{r} \equiv \Delta\mathbf{r}(t=0)$, l'écart initial entre les deux particules, on obtient :

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \Delta\mathbf{r} + t\Delta\mathbf{v} \quad (4.22)$$

la distance est minimale lorsque $\frac{d(\Delta\mathbf{r}(t))^2}{dt} = 0$, soit à l'instant :

$$t = -\frac{\Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{v}}{(\Delta\mathbf{v})^2} = t_{min}. \quad (4.23)$$

Ainsi, à partir de $\Delta\mathbf{r}(t = t_{min})$, on obtient la distance minimale d'approche :

$$d_{min}^2 = \Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} - \frac{(\Delta\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{v})^2}{(\Delta\mathbf{v})^2}. \quad (4.24)$$

Cette distance spécifique à ces deux particules doit être inférieure au rayon géométrique de la section efficace de collision $\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi N_{test}}}$. Le facteur 1/2 intervient car NN_{test} particules tests représentent $N/2$ atomes d'un spin donné. Si la collision est possible d'un point de vue géométrique, on propage la paire jusqu'à l'instant d'approche minimale (cette fois-ci la propagation contient le potentiel de piège). Lorsque la propagation est effectuée, les nouvelles impulsions après collision sont tirées aléatoirement dans le référentiel du centre de masse. Si l'on note \mathbf{p}_i le moment de la particule i avant la collision et $p_r = \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|$ le module du moment relatif qui est conservé au cours d'une collision, on obtient alors les nouvelles impulsions :

$$\begin{cases} \mathbf{p}'_1 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + p_r \mathbf{u})/2 \\ \mathbf{p}'_2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - p_r \mathbf{u})/2 \end{cases} \quad (4.25)$$

où \mathbf{u} est un vecteur unitaire dont l'orientation dans l'espace est aléatoire. Les nouvelles impulsions vérifient la conservation de l'énergie cinétique et de l'impulsion totale de la paire au cours de la collision, soit :

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{1}{2}(p_1'^2 + p_2'^2). \quad (4.26)$$

Lorsque les nouvelles impulsions sont déterminées, il faut vérifier que le nouvel état n'est pas déjà occupé. Si l'état final est libre, la collision est permise et on propage la paire avec les nouvelles impulsions. Dans le cas contraire, la collision est bloquée par le principe de Pauli et on restitue les positions et impulsions initiales.

4.2.3 Description lagrangienne

Il existe deux méthodes de simulation de l'équation de Boltzmann. La première, la méthode eulérienne, définit un réseau régulier qui pave l'espace des phases. La fonction de distribution est définie, à chaque instant t , par les valeurs qu'elle prend aux noeuds du réseau. Dans la seconde méthode (méthode lagrangienne), la fonction de distribution est projetée sur une base dépendante du temps. L'évolution des éléments de cette base détermine la dynamique de la fonction de distribution. Dans notre étude, nous avons utilisé une méthode lagrangienne qui permet de suivre chaque particule au cours de son mouvement. Ainsi, pendant un intervalle de temps Δt , au cours duquel on réalise une évolution de chaque particule, on peut avoir une propagation libre ou collision à un instant quelconque de l'intervalle de temps suivi d'une propagation.

Il est possible de faire une approximation sur le cas d'une particule subissant une collision pendant l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + \Delta t]$. En effet, on peut supposer que la collision a lieu en $t = t_0$, déterminer les nouveaux moments et propager la particule pendant Δt . Néanmoins, même si cette méthode est plus rapide car elle nécessite de ne calculer qu'une seule fois la propagation, elle n'est pas suffisamment précise, et nous donnait finalement des taux de collisions qui diminuaient au cours du temps. La raison de ce problème est la création d'une anticorrélation entre les particules après un certain nombre de collisions à cause d'un traitement trop approximatif du point où a lieu la collision : normalement, les particules devraient entrer en collision au moment de leur distance d'approche minimale. En pratique, si l'on suppose que toutes les collisions ont lieu en $t = t_0$, la distance au moment de la collision peut être supérieure à la distance minimale déterminée par la section efficace géométrique (d_{min}). Si dans ce cas l'angle aléatoire entre la distance et la vitesse relative après la collision est grand, la périodicité des orbites dans le potentiel harmonique fait que ces deux particules ne peuvent plus jamais se rapprocher à moins de d_{min} et donc elles ne peuvent plus entrer en collision. Il en résulte une chute non-physique du taux de collisions pour un gaz de fermions à l'équilibre.

Pour décrire la dynamique d'une particule sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \Delta t]$, on commence donc par déterminer, pour chaque paire de particules, la distance minimale d'approche d_{min} et l'instant associé dt_1 . Si cet instant est compris dans l'intervalle $[t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2}]$, on propage les particules jusqu'à cet instant $t_0 + dt_1$ (qui peut être inférieur à t_0), on effectue la collision en redéfinissant les moments, et on propage jusqu'à l'instant initial t_0 avec les nouveaux moments. La dernière étape de cet incrément temporel sera alors de propager toutes les particules jusqu'à l'instant $t_0 + \Delta t$ afin de définir les nouvelles impulsions et positions des particules. On peut alors passer à l'étape temporelle suivante.

En résumé, on a donc choisi de décrire la dynamique d'une particule subissant une collision par une propagation pendant $dt_1 < \Delta t$, dt_1 correspondant à l'instant où les particules ont une distance relative minimale, suivie d'une collision qui redéfinit les moments des particules entrées en collision et enfin une propagation avec les nouveaux moments pendant le temps $\Delta t - dt_1$. Cette description de la propagation d'une particule entrant en collision est plus coûteuse en temps de calcul car elle fait appel deux fois aux équations différentielles du mouvement pendant les intervalles de temps dt_1 et $\Delta t - dt_1$. Néanmoins, le résultat physique est correct et le taux de collisions est stable au cours du temps. Une première idée, plus intuitive et aussi longue en temps de calcul, avait été de ne réaliser que des propagations dans des temps futurs, donc de déterminer les temps d'approche minimale dans l'intervalle $[t_0, t_0 + \Delta t]$ (dt_1 serait alors toujours positif) et de propager ensuite les particules qui entrent

en collision entre t_0 et $t_0 + dt_1$, puis entre $t_0 + dt_1$ et $t_0 + \Delta t$. Néanmoins, cette méthode avait pour conséquence une bien moins bonne conservation de l'énergie totale du système. Cette diminution provenait probablement de la non compensation des erreurs numériques dans l'algorithme de propagation (Sec. 4.2.5) avec ce traitement asymétrique.

4.2.4 Initialisation

Avant de commencer la simulation, on doit initialiser les positions et moments des particules tests. On considère ici que le système est initialement à l'équilibre. Une fonction de distribution à l'équilibre convenable est donnée par la fonction de distribution dans le cadre de l'approximation de densité locale (LDA) :

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\beta(p^2/2m + V(\mathbf{r}) - \mu_0)} + 1} \quad (4.27)$$

car c'est la solution stationnaire de l'équation de Boltzmann. Cette distribution possède deux paramètres : la température T par l'intermédiaire de $\beta = 1/T$ et le potentiel chimique μ_0 . La température est un input du programme tandis que le potentiel chimique est déterminé en demandant que l'intégrale de l'Eq. (4.27) sur \mathbf{r} et \mathbf{p} donne le bon nombre de particules. Dans le cas où le potentiel $V(\mathbf{r})$ contient un champ moyen, l'Eq. (4.27) doit être déterminée de manière itérative.

Après la détermination du potentiel chimique, on génère de manière aléatoire les positions et moments des particules tests afin que la probabilité d'être à une position \mathbf{r} avec un moment \mathbf{p} soit proportionnelle à $f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$. En pratique, on commence par déterminer les positions à partir du profil de densité à l'équilibre puis on génère les moments avec f_{eq} .

4.2.5 Méthode de propagation

Au cours de la propagation des particules, on cherche à déterminer pour chaque pas de temps les positions et impulsions de chaque particule avec un maximum de précision et un minimum de calculs numériques. L'évaluation de la force, notamment lorsque l'on inclut le champ moyen, est le facteur limitant le temps de calcul. On utilise l'algorithme de Verlet pour les vitesses [76] qui contrairement à l'algorithme de Verlet original [77] utilise les positions $\mathbf{r}(t)$ et vitesses $\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t)/m$ comme point de départ de l'étape temporelle allant de t à $t + \Delta t$. L'algorithme de Verlet pour les vitesses, identique à la méthode appelée saut de grenouille (leapfrog) [80], permet d'obtenir une précision de l'ordre $(\Delta t)^2$ avec une seule évaluation de la force. En effet, connaissant $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$, il est possible d'évaluer la position de la particule à l'instant $t + \Delta t$:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)(\Delta t)^2 \quad (4.28)$$

et la vitesse au temps moitié :

$$\mathbf{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{a}(t)\Delta t}{2}. \quad (4.29)$$

On calcule ensuite l'accélération $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ à partir de la force, puis $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ de la même manière que précédemment :

$$\mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t)\Delta t}{2}. \quad (4.30)$$

Cela permet finalement d'aboutir au jeu d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)(\Delta t)^2 \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) = \mathbf{v}(t) + \frac{\mathbf{a}(t) + \mathbf{a}(t + \Delta t)}{2}\Delta t \end{cases} \quad (4.31)$$

la force (donc le potentiel) n'ayant été évalué qu'une seule fois. Si le potentiel total V contient, en plus du potentiel de piège V_T , un champ moyen U qui dépend de la densité, l'accélération $\mathbf{a}_i(t) = -\nabla V(\mathbf{r}_i(t), t)/m$ d'une particule test i dépend de la position de toutes les autres particules : c'est pour cette raison que la propagation entre t et $t + \Delta t$ est réalisée en deux étapes. On peut noter que l'accélération $\mathbf{a}_i(t + \Delta t)$ peut être utilisée pour la prochaine étape temporelle. Ainsi, pendant le pas de temps Δt , on peut déterminer les positions et vitesses finales en ne calculant qu'une fois l'accélération finale. Il faut aussi noter que cet algorithme suppose implicitement que l'accélération $\mathbf{a}(t + \Delta t)$ ne dépend que de la position $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ mais pas de la vitesse $\mathbf{v}(t + \Delta t)$: il n'y a pas de frottements dans le système. On considère donc qu'il y a conservation de l'énergie (dans la limite des erreurs numériques qui sont de l'ordre de $(\Delta t)^2$). La conservation est également une propriété physique du système qu'il nous faudra vérifier pour valider notre description ; nous verrons dans quelle mesure ce critère est validé (Sec. 4.2.7).

4.2.6 Optimisation

Le pas de temps Δt utilisé ne doit pas être trop grand pour pouvoir assimiler la trajectoire d'une particule à une trajectoire libre pendant ce pas de temps et pour résoudre correctement les équations du mouvement (Eq. (4.7)). Bien évidemment, on ne peut pas non plus le prendre trop petit afin de limiter le temps de calcul de notre programme. Il faut donc chercher à optimiser simultanément ce pas de temps Δt et le nombre de particules tests pour décrire la dynamique du gaz d'atomes froids. Par ailleurs, comme on l'a déjà vu (Sec. 4.1.3), on a besoin de minimiser l'écart à l'initialisation dû au nombre fini de particules tests.

En pratique, le pas de temps Δt et le nombre de particules tests ont des effets très différents sur les oscillations. Pour illustrer ce point, nous avons étudié le comportement de $\langle E_{pot} \rangle = m\omega_0^2 \langle r^2 \rangle / 2$, $\langle E_{kin} \rangle = \langle p^2 \rangle / 2m$ et aussi le moment $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle$. Si l'on introduit la notation :

$$\alpha_1(t) = \langle E_{kin} \rangle - \langle E_{pot} \rangle \text{ et } \alpha_2(t) = \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle, \quad (4.32)$$

on peut démontrer facilement que pour l'oscillateur harmonique sans champ moyen ces valeurs moyennes obéissent toujours (donc indépendamment de l'initialisation) aux équations :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1(t)}{dt} = -2\omega_0^2 \alpha_2(t) \\ \frac{d\alpha_2(t)}{dt} = 2\alpha_1(t) \end{cases} \quad (4.33)$$

avec la solution

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \alpha_1(0) \cos(2\omega_0 t) - \omega_0 \alpha_2(0) \sin(2\omega_0 t) \\ \alpha_2(t) = \alpha_2(0) \cos(2\omega_0 t) + \frac{\alpha_1(0)}{\omega_0} \sin(2\omega_0 t) \end{cases} \quad (4.34)$$

Le fait que $\alpha_1(t)$ oscille autour de 0 implique notamment qu'il ne peut pas y avoir de décalage constant entre $\langle E_{pot} \rangle$ et $\langle E_{kin} \rangle$. En effet, le théorème du viriel doit être satisfait quand on moyenne sur le temps. Dans le cas contraire, donc s'il y avait un décalage constant entre $\langle E_{pot} \rangle$ et $\langle E_{kin} \rangle$, cela signifierait que les équations du mouvement pour les trajectoires des particules tests ne sont pas correctement résolues. Il faut donc choisir le pas Δt suffisamment

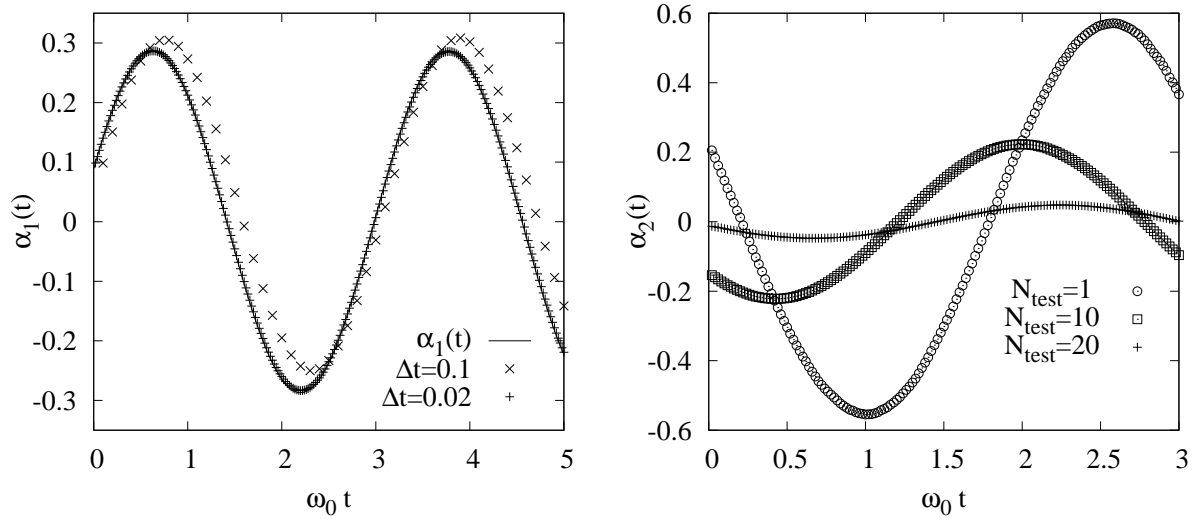


FIG. 4.3 – Sur la figure de gauche, on trace $\alpha_1(t)$ pour un pas de temps $\Delta t = 0.1/\omega_0$ et $\Delta t = 0.02/\omega_0$ ainsi que les simulations numériques correspondantes. On optimise Δt en superposant le fit et la simulation. Sur la figure de droite, on trace $\alpha_2(t)$ pour un pas de temps $\Delta t = 0.02/\omega_0$ et pour $N_{\text{test}} = 1$, $N_{\text{test}} = 10$ et $N_{\text{test}} = 20$. Dans tous les cas, les accords sont corrects, néanmoins, l'amplitude de l'oscillation de $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle$ diminue lorsqu'on augmente le nombre de particules tests.

petit pour que ces équations soient satisfaites. Nous avons trouvé que c'était effectivement le cas pour $\Delta t \sim 0.02/\omega_0$. Pour un pas Δt de cet ordre, l'amplitude de l'oscillation est donc uniquement déterminée par les conditions initiales $\alpha_1(0)$ et $\alpha_2(0)$. Le fait que ces conditions initiales $\alpha_1(0)$ et $\alpha_2(0)$ ne soient pas nulles peut avoir deux causes : soit une mauvaise initialisation des positions ou des impulsions, ce qui impliquerait une déviation systématique de $\alpha_1(0)$ par rapport à 0, soit que le nombre fini de particules tests crée des fluctuations statistiques des valeurs initiales de $\alpha_1(0)$ et de $\alpha_2(0)$. Nous avons résolu la première cause en augmentant la précision de l'initialisation avec un meilleur générateur de nombres aléatoires. Pour la seconde cause, nous avons considéré $\alpha_2 = \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle$. En effet, pour α_2 , il n'y a pas d'autre cause que le nombre de particules tests parce que dans l'initialisation les directions des \mathbf{r} et des \mathbf{p} sont complètement indépendantes et donc non corrélées. Ainsi, si on trouve que les fluctuations de $\alpha_1(0)$ sont du même ordre de grandeur que celles de $\alpha_2(0)$, on est sûr que se sont vraiment des fluctuations statistiques qu'on ne peut réduire qu'en augmentant le nombre de particules tests. Néanmoins, l'augmentation du nombre de particules tests a un impact direct sur le temps de calcul du programme. Il nous faut donc trouver un compromis entre la précision et le temps de calcul dans la détermination de N_{test} . Ceci valide à la fois le pas de temps Δt utilisé et la méthode d'initialisation du gaz.

4.2.7 Conservation de l'énergie

Dans la modélisation de notre problème, l'énergie n'est pas dissipée pendant le processus de propagation des particules (Eqs. (4.7)) : en effet, nous avons vu précédemment (Sec. 4.2.5) que la propagation des particules est déterminée numériquement par l'algorithme de Verlet qui suppose implicitement que l'énergie n'est pas dissipée au cours d'une propagation

pendant l'incrément de temps Δt . De plus, puisqu'on considère des collisions élastiques entre particules de spins opposés, le terme de collision doit donc aussi conserver l'énergie d'une paire de particules au cours d'une collision. Deux questions se posent alors sur la conservation de l'énergie. Tout d'abord, l'énergie du système de particules est-elle réellement conservée au cours du temps que le gaz soit excité ou à l'équilibre ? La valeur de l'énergie du système est-elle correcte ? Pour répondre à la première question, le point important est de déterminer le facteur limitant la conservation de l'énergie. La seconde question relève plus de la qualité de l'initialisation. En effet, si le gaz est correctement initialisé et l'énergie conservée au cours du temps, alors la valeur obtenue sera nécessairement correcte. Pour fixer les idées, on introduit la notation :

$$\eta(t) = \frac{|E(t) - E(0)|}{E(0)}, \quad (4.35)$$

qui correspond à l'erreur commise sur l'énergie totale par le programme sur l'intervalle $[0, t]$.

On peut donc commencer par déterminer, dans toutes les étapes de la programmation, les possibilités de perte d'énergie. La première cause possible est une diminution du nombre de particules. Expérimentalement, les particules les plus énergétiques peuvent sortir du piège et ce qui induit nécessairement une diminution de l'énergie du système. Dans notre simulation, les particules sont piégées par un potentiel purement harmonique qui, par conséquent, est impossible à franchir. Cette possibilité ne peut donc pas avoir lieu. Néanmoins, dans le cas où l'on souhaite décrire un potentiel anharmonique (cas expérimental) deux solutions s'offrent à nous : soit l'on augmente artificiellement la profondeur du piège afin de garder toutes les particules dans le système, soit l'on choisit d'utiliser exactement les paramètres expérimentaux avec pour conséquence une diminution du nombre de particules. La diminution de l'énergie devient alors une propriété du système que l'on cherche à reproduire. Une autre cause possible de la perte d'énergie vient des erreurs numériques. D'un point de vue numérique, la perte d'énergie peut provenir du terme de collision ou de la propagation. Nous avons vu (Eq. (4.26)) que la redéfinition des moments des particules après une collision conserve le moment et l'énergie de la paire de particules. En pratique, on vérifie que la perte d'énergie relative d'une paire de particules au cours d'une collision est de l'ordre de la précision de la machine, soit $\eta(t) < 10^{-14}$. Le seul facteur limitant restant est donc l'algorithme de Verlet utilisé pour la propagation des particules. Lors de la propagation d'une particule, la précision dépend de l'incrément temporel Δt que l'on a optimisé (Sec. 4.2.6) pour résoudre les équations du mouvement. La précision pour la propagation d'une particule test est à l'origine d'une erreur de l'ordre de $(\Delta t)^2$. Néanmoins, la méthode de propagation permet de compenser ces erreurs et l'on obtient une erreur relative pour une particule test de l'ordre de $\eta(t) < 2.10^{-11}$, ce qui signifie une erreur relative de l'énergie totale pour un système de 10000 particules $\eta(t) < 4.10^{-6}$. On montre (Fig 4.4) l'évolution de l'énergie relative $\eta(t)$ au cours du temps pour un système de $N = 10000$ fermions à une température $T = 0.5T_F$ et une interaction $1/k_F a = -0.5$. L'erreur relative sur l'énergie est dans ce cas : $\eta(t) \leq 1.6.10^{-6}$. On observe une oscillation d'amplitude très faible de l'erreur relative ($< 2.10^{-6}$). Cette oscillation régulière, avec une pulsation $\omega = \omega_0$, a lieu à la pulsation du mode excité ou, comme dans le cas de la figure (Fig. 4.2.7), avec une période égale à π . L'amplitude de cette oscillation est extrêmement faible en comparaison des amplitudes étudiées, elle provient d'erreurs numériques dans l'algorithme de Verlet et n'est pas significative pour être considérée par la suite.

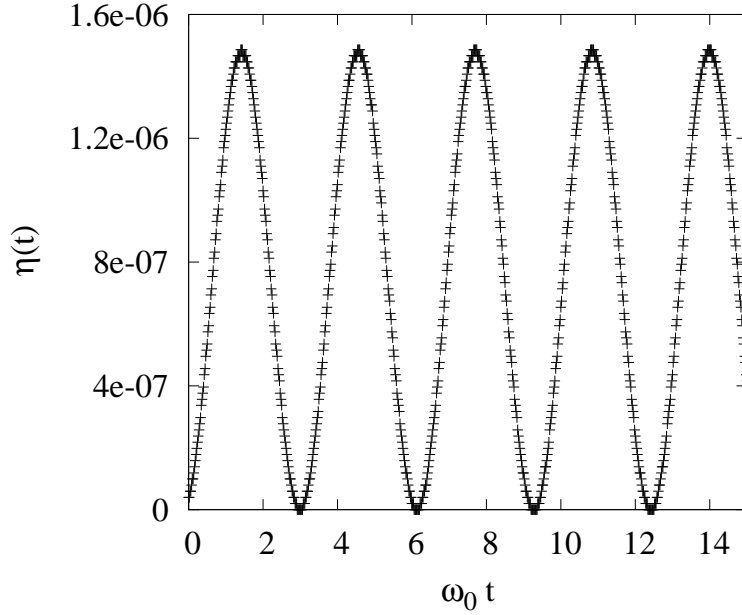


FIG. 4.4 – Conservation relative de l'énergie pour un système de $N = 10000$ fermions à une température $T = 0.5T_F$ et une interaction $1/k_F a = -0.5$. L'oscillation de très faible amplitude provient de l'algorithme de Verlet.

4.2.8 Stabilité de la distribution d'équilibre

Un test important de notre simulation est de montrer qu'une distribution d'équilibre est stable numériquement au cours du temps, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dérive vers un autre état d'équilibre par exemple. Pour le montrer, on regarde la distribution des atomes comme une fonction de leur énergie :

$$\frac{dN}{dE} = 2 \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \delta\left(\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - E\right). \quad (4.36)$$

A l'équilibre, la distribution devrait être donnée par :

$$\frac{dN}{dE} = \frac{g(E)}{e^{(E-\mu)/T} + 1}, \quad (4.37)$$

où $g(E)$ est la densité d'états (incluant le facteur 2 de dégénérescence de spin). Dans le cas d'un oscillateur harmonique sphérique sans champ moyen, on obtient $g(E) = E^2/\omega_0^3$. En l'absence de collision, la conservation de l'énergie implique automatiquement que la distribution reste constante, mais en présence de collisions, on peut tester le blocage de Pauli, *i.e.* le rejet des collisions avec une probabilité $1 - (1 - f')(1 - f'_1)$, dans la simulation.

On montre (Fig. 4.5), pour deux températures différentes ($T/T_F = 0.2$ et 0.4), la distribution de Fermi initiale (trait plein) et la distribution correspondante obtenue par la simulation numérique après $t = 30/\omega_0$ (cercles pleins). Dans le cas $T/T_F = 0.4$, on observe que la distribution générée par la simulation est en parfait accord avec la fonction de Fermi initiale. Dans le cas $T/T_F = 0.2$, l'accord n'est pas parfait, spécialement dans la queue exponentielle de la distribution, mais toujours très satisfaisant. Afin de montrer qu'il ne s'agit pas d'un résultat trivial, on regarde aussi ce qu'il se passe lorsque l'on enlève le blocage de

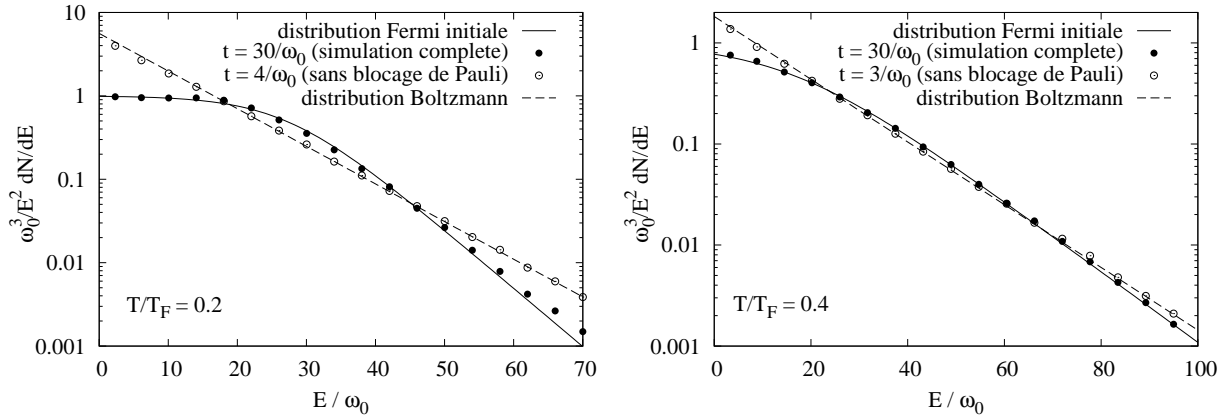


FIG. 4.5 – Distribution des atomes en fonction de leur énergie (divisée par la densité d'états) pour $T = 0.2T_F$ (gauche) et $0.4T_F$ (droite) : distribution de Fermi initiale (trait plein), distribution stationnaire de la simulation numérique (cercles pleins), distribution stationnaire de la simulation numérique sans le blocage de Pauli (cercles vides) et pour comparaison la distribution de Boltzmann correspondant à la même valeur du nombre d'atomes et de l'énergie totale. Les tests ont été réalisés pour un gaz de $N = 10000$ atomes et une longueur de diffusion correspondant à $1/(k_F a) = -0.5$. Le nombre de particules tests dans les simulations était de $NN_{test} = 50000$, avec les largeurs des gaussiennes $w_r = 1.5 l_{oh}$ et $w_p = 1.5/l_{oh}$ et un pas de temps $\Delta t = 0.02/\omega_0$.

Pauli dans la simulation du terme de collision. Dans ce cas, au bout d'un temps relativement court $\sim 3/\omega_0$, la distribution de la simulation numérique (cercles vides) a convergé vers une distribution de Boltzmann (tirets). Ainsi, la stabilité de la distribution de Fermi dans toute notre simulation montre clairement que le blocage de Pauli est correctement implémenté.

4.2.9 Convergence du taux de collisions

Au cours de chaque étape temporelle du programme, un certain nombre de collisions sont autorisées ou bloquées par le principe de Pauli. Un paramètre important est le nombre de collisions par unité de temps : le taux de collisions. Or, il est aussi possible de déterminer le taux de collisions théorique du système (Sec. 4.1.5). La comparaison de ce taux théorique avec le taux obtenu par simulation permet ainsi de déterminer si la description du système avec les particules tests est suffisante, c'est-à-dire si le nombre de particules tests par particule utilisé pour réaliser la simulation est assez élevé. Pour une section efficace des atomes σ , la section efficace des particules tests est $\sigma/(2N_{test})$ (car NN_{test} particules tests représentent $N/2$ atomes d'un même spin et σ est la section efficace entre atomes de spins opposés). La distance maximale au moment de la collision est donc $\sqrt{\sigma/(2\pi N_{test})}$. Si la fonction de distribution varie trop sur cette distance, le résultat n'est évidemment pas le même que si les collisions étaient locales. On peut diminuer N_{test} si l'on prend un nombre d'atomes N plus élevé, ce qui augmente la taille du système donc la longueur sur laquelle la fonction de distribution varie sans diminuer le nombre total de particules tests NN_{test} .

On montre (Fig. 4.6) le taux de collisions en fonction du temps dans le cas d'un gaz de $N = 10000$ fermions, à $T = 0.4T_F$ et une interaction $((k_F a)^{-1} = -0.5$ pour deux valeurs différentes du nombre N_{test} de particules tests par particule. Le gaz, initialisé à l'équilibre,

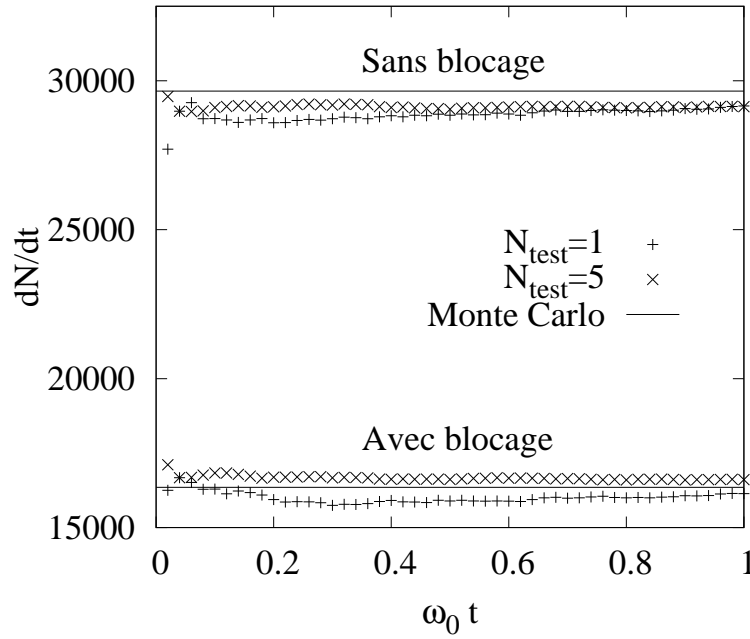


FIG. 4.6 – Convergence du taux de collisions pour un gaz de $N = 10000$ fermions, à $T = 0.4T_F$ et une interaction $((k_F a)^{-1} = -0.5$ selon deux valeurs différentes du nombre NN_{test} de particules tests. Les simulations sont comparées aux valeurs théoriques obtenues par Monte Carlo. Dès $N_{test} = 1$, le taux de collisions est correct mais légèrement moins stable avec le temps. Par la suite, on utilisera $N_{test} = 5$ pour décrire correctement l'espace des phases lors de la simulation des modes collectifs d'un gaz.

évolue librement au cours du temps. Le taux de collisions obtenu par simulation numérique en comptant les collisions au cours de chaque pas de temps est comparé à la valeur théorique évaluée par Monte Carlo (Eq. (4.13)). Le gaz avec $N_{test} = 1$ décrit déjà très bien le taux de collisions avec et sans blocage de Pauli. De plus, la convergence temporelle est effective dès quelques pas de temps. Dans le cas $N_{test} = 5$, le taux de collisions converge encore plus rapidement vers sa valeur finale sans perte de précision au niveau de la valeur limite. La nécessité d'optimiser les paramètres numériques oblige à utiliser un nombre de particules tests suffisamment élevé (Sec. 4.2.6). Ainsi, dans le cas d'un gaz ayant ces paramètres, on utilisera une valeur du nombre de particules tests par particule $N_{test} = 5$ permettant de décrire correctement l'espace des phases sans nécessiter une capacité de calcul trop importante.

4.2.10 Expansion libre du gaz

Une possibilité qui nous est offerte par l'écriture du code de l'équation de transport est de reproduire des expériences telles que l'expansion d'un gaz de fermions en interaction. En effet, on peut à partir d'un instant t éteindre le piège de confinement des atomes et laisser évoluer les particules. Evidemment, la densité du nuage d'atomes et le taux de collision vont diminuer. Ce problème d'expansion d'un gaz de fermions a déjà été résolu analytiquement [78] pour un gaz dans un piège harmonique non sphérique ($\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$), l'évolution temporelle du rayon moyen est alors donnée par :

$$\langle r_{\perp}^2(t) \rangle = \frac{4}{3\omega_x^2} \frac{E_{rel}}{N} (1 + \omega_x^2 t^2) \quad (4.38)$$

et

$$\langle z^2(t) \rangle = \frac{2}{3\omega_z^2} \frac{E_{rel}}{N} (1 + \omega_z^2 t^2) \quad (4.39)$$

où E_{rel} est l'énergie totale du système au moment où l'on éteint le piège. Ces formules ne sont valables que dans le cas sans collisions. On a pu vérifier ces formules à partir de notre simulation : on voit ainsi (Fig. 4.7) l'évolution temporelle de $\langle x^2 + y^2 \rangle$ et $\langle z^2 \rangle$ en fonction du temps ainsi que les fits donnés par les Eq. (4.38) et 4.39 pour un gaz de $N = 1000$ fermions à une température $T/T_F = 0.5$, une interaction forte $1/k_F a = -0.1$ et pour un gaz dans un piège harmonique sphérique ($\langle z^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle r_{\perp}^2 \rangle$). Un tel système a un taux de collisions très faible qui, de plus, décroît très vite avec l'expansion et peut donc reproduire les équations (4.38) et (4.39). L'accord entre la simulation et la courbe théorique (Fig. 4.7) reste très bon quelques soient la température et l'intensité de l'interaction. De plus, la figure (Fig. 4.7) ne présente le résultat que jusqu'à $t = 2/\omega_0$ afin de mieux distinguer les points de la simulation. Néanmoins, l'accord reste très bon pour des temps bien plus grands ($t \simeq 50/\omega_0$). Le léger écart observé provient de la déviation numérique dans l'initialisation. La généralisation au cas $\omega_x \neq \omega_z$ ne poserait aucun problème et a déjà été réalisée [79] ; nous nous sommes donc limités au cas qui nous préoccupe ici.

Nous avons réalisé de nombreux tests numériques afin de vérifier que le programme réalisé permettait de décrire parfaitement l'évolution d'un gaz de fermions. Nous avons ainsi décrit la méthode de propagation (qui conserve l'énergie), optimisé le pas de temps et le nombre de particules tests pour résoudre correctement les équations du mouvement, et vérifié la convergence et la valeur limite du taux de collisions (conforme à la prédiction théorique).

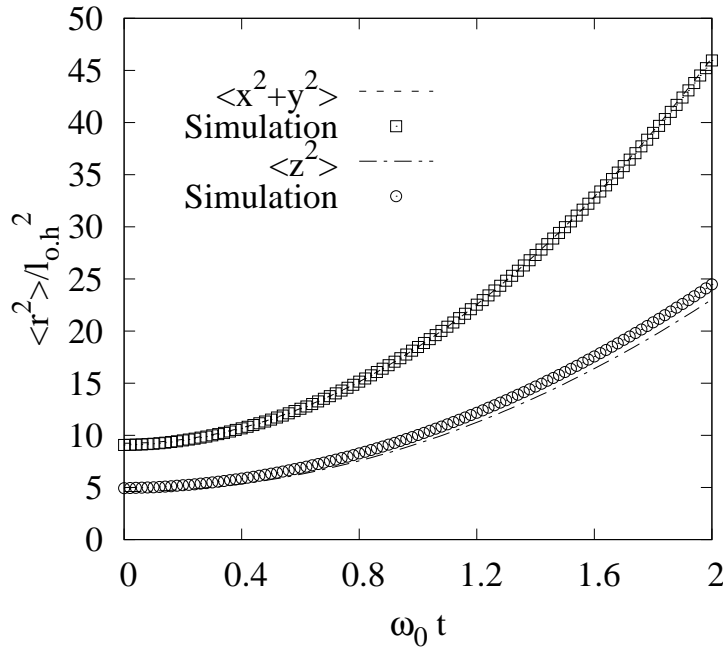


FIG. 4.7 – Evolution temporelle du rayon carré moyen pour un gaz de $N = 1000$ fermions à une température $T/T_F = 0.5$ et une interaction forte $1/k_F a = -0.1$. Pour $t < 0$, le gaz est piégé et à l'équilibre puis, à $t = 0$, on éteint le potentiel de piège. Les rayons carrés suivent alors les équations Eq. (4.38) et Eq. (4.39) pendant l'expansion. La courbe n'est représentée que jusqu'à $\omega_0 t = 2$ mais l'accord entre théorie et simulation reste très bon pour des temps bien plus élevé $\sim 50/\omega_0$.

Nous allons désormais simuler l'évolution d'un gaz de fermions soumis à une excitation. Le but sera de décrire alors la dynamique du mode collectif associé. On étudiera tout d'abord des modes non amortis pour vérifier les prédictions théoriques associées, puis on se focalisera sur l'étude d'un mode amorti dont la fréquence et l'amortissement dépendent de la température et de l'interaction. Nous avons le choix entre l'étude du mode quadrupolaire et du mode ciseaux ; nous avons choisi de nous focaliser sur le mode quadrupolaire pour un gaz dans un piège harmonique sphérique.

4.3 Etude théorique du mode quadrupolaire

Après avoir réalisé de nombreux tests sur le code numérique décrivant la dynamique du gaz d'atomes froids, on cherche désormais à interpréter des résultats concernant la réponse du gaz à une excitation (Sec. 4.3.1). On va donc commencer par décrire la réponse du gaz par la méthode des moments puis comparer ce résultat aux autres résultats théoriques et aux données expérimentales.

4.3.1 Excitation des modes

Pour l'étude théorique des modes collectifs, on considère un gaz initialisé à l'équilibre, que l'on excite d'une manière particulière pour chaque mode puis on observe l'évolution temporelle (relaxation) afin de déterminer la fréquence et l'amortissement associés. Pour exciter un mode, on réalise une perturbation du gaz à $t = t_{kick}$. Formellement, cela revient à ajouter au potentiel de piège indépendant du temps une excitation de la forme :

$$V_1(\mathbf{r}, t) = \hat{V}_1(\mathbf{r})\delta(t - t_{kick}). \quad (4.40)$$

La raison de ce choix, qui est bien sûr différent de la méthode expérimentale d'excitation des modes, est la suivante : tant que la perturbation \hat{V}_1 est suffisamment faible pour que le système réponde linéairement, la réponse du système avec une dépendance temporelle arbitraire $V_1(\mathbf{r}, t) = \hat{V}_1(\mathbf{r})F(t)$ peut être obtenue facilement à partir d'une convolution du résultat de l'Eq. (4.40) avec la fonction $F(t)$.

Commençons par examiner l'effet de ce "kick" dans l'espace des phases, et plus particulièrement la fonction de distribution (la répercussion sur les équations du mouvement est alors immédiate). Si l'on intègre l'équation de Boltzmann sur la durée infinitésimale du "kick", la fonction de distribution est modifiée selon :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_{kick}^+) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \nabla \hat{V}_1(\mathbf{r}), t_{kick}^-), \quad (4.41)$$

où t_{kick}^+ et t_{kick}^- sont respectivement les limites supérieure et inférieure de $t \rightarrow t_{kick}$. L'effet de la perturbation sur les équations du mouvement, pour un gaz dans un piège sphérique harmonique, est de modifier les équations hamiltoniennes du mouvement (Eq. (4.7)) selon :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla_r[V_T(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) + \hat{V}_1(\mathbf{r})\delta(t - t_{kick})] \end{cases} \quad (4.42)$$

que l'on intègre sur l'intervalle $[t_{kick} - \Delta t, t_{kick} + \Delta t]$. La première équation différentielle donne :

$$\mathbf{r}(t_{kick} + \Delta t) - \mathbf{r}(t_{kick} - \Delta t) = \frac{\mathbf{p}}{m} 2\Delta t, \quad (4.43)$$

soit dans la limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\mathbf{r}(t_{kick}^-) = \mathbf{r}(t_{kick}^+). \quad (4.44)$$

La même procédure pour la seconde équation différentielle nous mène à :

$$\mathbf{p}(t_{kick} + \Delta t) - \mathbf{p}(t_{kick} - \Delta t) = -2\Delta t \nabla_{\mathbf{r}}[V_T(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})] - \nabla_{\mathbf{r}}[\hat{V}_1(\mathbf{r})], \quad (4.45)$$

soit dans la limite $\delta(t) \rightarrow 0$:

$$\mathbf{p}(t_{kick}^+) = \mathbf{p}(t_{kick}^-) - \nabla_{\mathbf{r}} \hat{V}_1(\mathbf{r}). \quad (4.46)$$

Ainsi, la perturbation ne modifie pas le vecteur position \mathbf{r} des particules mais change leur impulsion \mathbf{p} : dans l'espace des moments, les impulsions subissent une discontinuité lors de l'excitation. L'effet est visible sur la fonction de distribution mais numériquement, on utilisera la modification sur les impulsions. Enfin, comme on l'a déjà dit, la perturbation étant en $\delta(t - t_{kick})$, elle contient toutes les fréquences et la transformée de Fourier de $\langle V_1(\mathbf{r}, t) \rangle$ nous donnera directement le spectre d'excitation.

4.3.2 Mode de Kohn

Le premier mode que l'on a étudié est le mode de Kohn (cf Sec. 3.6.1). Ce mode est une oscillation collective du centre de masse du gaz autour de sa position d'équilibre. Il est utilisé expérimentalement pour déterminer la fréquence du piège qui, d'après le théorème de Kohn, doit être égale à la fréquence d'oscillation du mode indépendamment du nombre de particules, de la température ou encore de l'interaction entre les atomes. De plus, ce mode est non amorti [71, 72]. Avec la méthode des particules tests, ce théorème est en réalité automatiquement vérifié et il est facile de voir pourquoi. Tout d'abord, on néglige le terme de collisions ; les équations du mouvement de chaque particule test dans un piège harmonique s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i/m \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{p}}_i = -m\omega_0^2 \mathbf{r}_i. \quad (4.47)$$

Il est donc évident que les moyennes $\langle \mathbf{r} \rangle$ et $\langle \mathbf{p} \rangle$ obéissent à des équations du mouvement analogues :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -m\omega_0^2 \langle \mathbf{r} \rangle. \quad (4.48)$$

Considérons ensuite l'effet des collisions entre les particules : même si les trajectoires individuelles des particules entrant en collision ne vont plus obéir aux équations du mouvement originales (Eq. 4.47), les collisions n'auront absolument aucun effet sur les moyennes. En effet, comme les positions ne sont pas modifiées pendant une collision, $\langle \mathbf{r} \rangle$ sera inchangé, et comme le moment total des particules entrant en collision est conservé, $\langle \mathbf{p} \rangle$ ne sera pas modifié non plus. Donc, les équations du mouvement (Eqs. 4.48) pour les moyennes $\langle \mathbf{r} \rangle$ et $\langle \mathbf{p} \rangle$ restent valides même en présence de collisions. Leur solution est une oscillation non amortie du centre de masse $\langle \mathbf{r} \rangle$ avec une fréquence ω_0 . Ceci est confirmé par le résultat numérique (Fig. 4.8) où l'on montre le mode de Kohn pour un gaz de $N = 5000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.3$. Ce résultat est identique quels que soient l'interaction, la température et le nombre de particules du système, ce qui permet de valider le théorème de Kohn.

Remarquons que l'état hors équilibre du mode de Kohn est une modification de la position du centre de masse du gaz : son excitation par la méthode vue précédemment (Sec. 4.3.1) est possible en modifiant les impulsions $p'_i = p_i + c$ où c est une constante. Néanmoins, dans

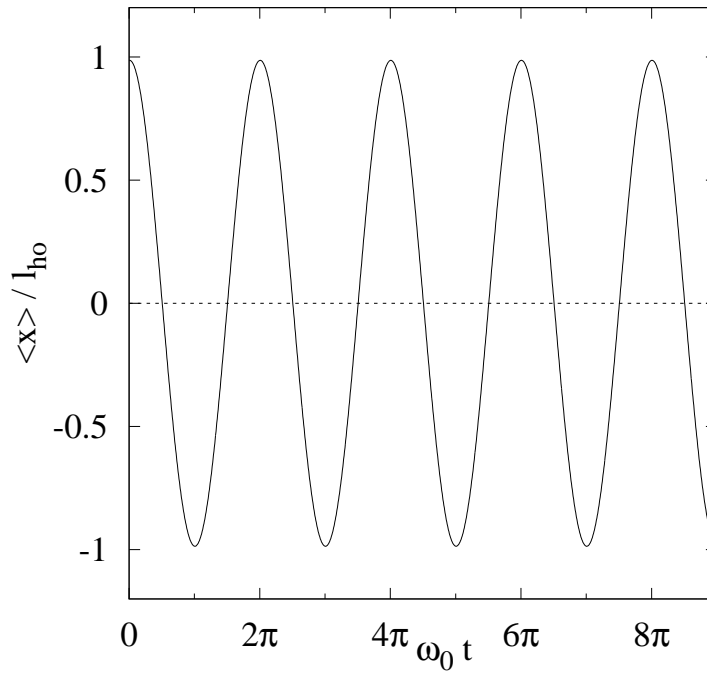


FIG. 4.8 – Mode de Kohn pour un gaz de $N = 5000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.3$. A $t = 0$, le centre de masse du gaz est déplacé suivant x de $+l_{oh}$. L'observable est $\langle x \rangle$ qui oscille autour de sa valeur d'équilibre 0. L'amplitude de cette oscillation est bien plus grande que les effets numériques observés lors de l'initialisation, permettant ainsi d'identifier l'oscillation à un mode.

ce cas uniquement, on a procédé différemment en agissant directement sur les positions des particules. Par exemple, si l'on souhaite observer le mode de Kohn selon l'axe x , on réalise une perturbation :

$$x'_i = x_i + cx_i \quad (4.49)$$

pour chaque particule i . Le paramètre c quantifie cette fois-ci l'écart à l'équilibre. Pour tous les autres modes que l'on a étudiés, la méthode décrite précédemment (Sec. 4.3.1) sera bien évidemment utilisée.

4.3.3 Mode de respiration

Certaines expériences [56, 57, 67] étudient l'amortissement du mode de respiration radial et longitudinal dans les pièges allongés. Dans un piège sphérique, il n'y a qu'un seul mode de respiration (mode monopolaire), correspondant à l'oscillation du rayon carré moyen $\langle r^2 \rangle_{eq}$. Dans un piège sphérique harmonique sans champ moyen, ce mode n'est pas amorti et sa fréquence $2\omega_0$ est indépendante du taux de collisions. Pour comprendre cela, considérons les énergies cinétique et potentielle moyennes $\langle E_{kin} \rangle = \langle p^2 \rangle / 2m$ et $\langle E_{pot} \rangle = m\omega_0^2 \langle r^2 \rangle / 2$. A cause du théorème du viriel (Sec. 3.5), ces deux énergies sont égales à l'équilibre (Eq. (3.43) avec $\chi = 0$). Si maintenant le système est comprimé ou dilaté (dans ce cas $\langle E_{kin} \rangle \neq \langle E_{pot} \rangle$), on obtient, à partir des équations du mouvement (4.47), le système d'équations déjà vues (Eq. (4.33), absence de collisions) :

$$\frac{d}{dt}(\langle E_{kin} \rangle - \langle E_{pot} \rangle) = -2\omega_0^2 \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle \quad (4.50)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle = 2(\langle E_{kin} \rangle - \langle E_{pot} \rangle). \quad (4.51)$$

Ces équations décrivent une oscillation non amortie avec une fréquence $2\omega_0$. Regardons maintenant ce qu'il se passe lorsque que l'on considère les collisions : comme elles ne modifient pas la position et conservent l'énergie cinétique totale, il est clair que $\langle E_{kin} \rangle$ et $\langle E_{pot} \rangle$ ne sont pas affectés. Le membre de gauche de l'Eq.(4.50) est donc indépendant des collisions. Ecrivons maintenant la différence de $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle$ avant et après la collision pour deux particules i et j :

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle' - \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{NN_{test}} \mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{q}'_{ij} - \mathbf{q}_{ij}), \quad (4.52)$$

où \mathbf{q}_{ij} et \mathbf{q}'_{ij} sont les moments relatifs avant et après la collision. Dans le terme de collision original, les particules doivent être à la même position pour entrer en collision, *i.e.* $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{0}$: ainsi $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle$ est inchangé. Néanmoins, la situation est différente dans notre simulation car les particules peuvent entrer en collision tout en étant à une distance non nulle pouvant aller jusqu'à $\sqrt{\sigma/(2\pi N_{test})}$. Ceci ajoute un bruit à $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle$ que l'on a déjà étudié (Sec. 4.2.6). Dans tous les cas pratiques, nous avons vu que l'on optimise les paramètres du code numérique afin de rendre ce bruit complètement négligeable. Pour exemple, on voit (Fig. 4.9) l'évolution temporelle du rayon carré moyen du nuage d'atomes pour un gaz de $N = 5000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.3$. On remarque qu'il s'agit d'une oscillation non-amortie à la fréquence $2\omega_0$. Il est important de noter que ce résultat reste vrai quels que soient l'interaction, la température et le nombre de particules du système.

Ce mode de respiration est excité à partir d'un potentiel :

$$\hat{V}_1(\mathbf{r}) = -\frac{c}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (4.53)$$

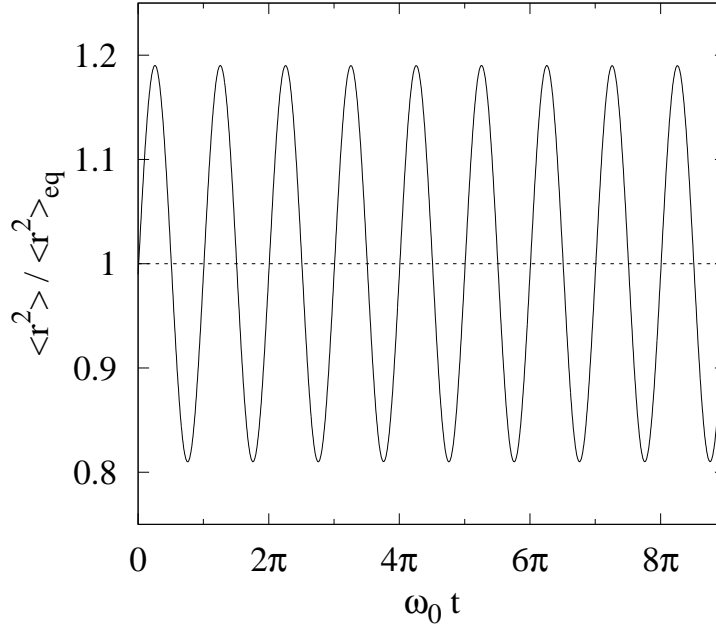


FIG. 4.9 – Mode monopolaire excité pour un gaz de $N = 5000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.3$. L'observable est $\langle r^2 \rangle$ que l'on ramène à 1 en divisant par l'énergie du système. On voit une amplitude d'oscillation de l'ordre de 20%, correspondant à $c = 0.2m\omega_0$, qui ne diminue pas au cours du temps.

qui modifie les impulsions des particules du gaz à $t = 0$ selon la relation :

$$\mathbf{p}(0^+) = \mathbf{p}(0^-) + c\mathbf{r}(0). \quad (4.54)$$

Ainsi, pour un coefficient c positif, on observera tout d'abord une dilatation du gaz avant un retour non amorti vers l'équilibre qui entraîne une oscillation comme on peut voir sur la figure (Fig. 4.9). Dans le cas contraire, le gaz subit évidemment tout d'abord une compression.

4.3.4 Mode quadrupolaire dans le cas classique

Expérimentalement, après avoir excité le mode quadrupolaire, on observe que celui-ci subit un amortissement au cours du temps. La dynamique collective du gaz étant due aux collisions, ces dernières vont donc jouer un rôle important dans la description de ce mode.

Dans le cas d'un piège allongé, il existe plusieurs modes quadrupolaires : le mode quadrupolaire radial, le mode de respiration et le mode ciseaux. Néanmoins, puisque nous considérons ici le cas d'un piège sphérique, ces modes sont dégénérés et on ne parlera donc que du mode quadrupolaire.

Nous allons commencer par une vérification du comportement non amorti du gaz dans le cas Boltzmann (on néglige les effets de la statistique de Fermi-Dirac), régime dans lequel il est possible de déterminer analytiquement la réponse du gaz.

Le potentiel d'excitation s'écrit :

$$\hat{V}_1(\mathbf{r}) = \frac{c}{2}(x^2 - y^2)\delta(t) \quad (4.55)$$

correspondant à un kick appliqué à $t = 0$. Cette excitation implique alors de modifier les impulsions par les relations :

$$\begin{cases} p'_x = p_x - cx \\ p'_y = p_y + cy \end{cases} \quad (4.56)$$

Le facteur c permet de contrôler l'amplitude du kick donné dans l'espace des impulsions. Si le facteur c est choisi trop faible, il est difficile de séparer l'équation des modes des fluctuations numériques ; s'il est choisi trop grand, on n'est plus dans le domaine de réponse linéaire. Tous les résultats ont été obtenus pour un paramètre $c = 0.2m\omega_0$ correspondant à des amplitudes modérées. Pour vérifier que l'on était dans le régime linéaire, on a fait varier c dans des limites raisonnables et observé que l'amplitude de l'oscillation résultante variait linéairement avec c .

Les équations du mouvement (Eq. (4.7)) combinées avec l'excitation du mode (Eq. (4.56)), nous permettent de déterminer l'évolution temporelle $x(t)$ et $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0 - c/m x_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v'_0 + c/m y_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases}, \quad (4.57)$$

où $x_0 = x(t=0)$, $y_0 = y(t=0)$, $v_0 = dx/dt(t=0)$ et $v'_0 = dy/dt(t=0)$. Dans le cas simple de la statistique classique, on utilise les valeurs moyennes dans le cas Boltzmann :

$$\langle x_0^2 \rangle = \frac{T}{m\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \langle v_0^2 \rangle = \frac{T}{m}, \quad (4.58)$$

et avec $\langle xv \rangle = 0$, on peut alors calculer $\langle x^2(t) \rangle$ et $\langle y^2(t) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle(t) &= \frac{T}{m\omega_0^2} \left(\left[\cos(\omega_0 t) - \frac{c}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]^2 + \sin^2(\omega_0 t) \right) \\ \langle y^2 \rangle(t) &= \frac{T}{m\omega_0^2} \left(\left[\cos(\omega_0 t) + \frac{c}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right]^2 + \sin^2(\omega_0 t) \right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

On obtient alors, dans le cas d'un piège sphérique et pour une statistique de Boltzmann, la réponse du système en fonction du temps :

$$\langle x^2 - y^2 \rangle(t) = -\frac{2cT}{m^2\omega_0^3} \sin(2\omega_0 t). \quad (4.60)$$

Afin de reproduire les conditions du calcul dans la simulation, il faut se placer à une température $T > T_F$ et une interaction faible $1/k_F a = -2.0$. On trace alors (Fig. 4.10) la réponse de la simulation que l'on compare à l'équation théorique (Eq. (4.60)). On observe un très bon accord entre la simulation et la réponse du gaz donnée par l'approximation de la statistique de Boltzmann. La précision de la réponse dépend bien évidemment du nombre de particules tests utilisées. Dans notre cas, on a choisi $N_{test} = 5$ qui permet de bien reproduire le taux de collisions théorique (Eq. (4.13)). Désormais, on va étudier la réponse au mode quadrupolaire pour des températures plus faibles où l'on doit prendre en compte la statistique de Fermi.

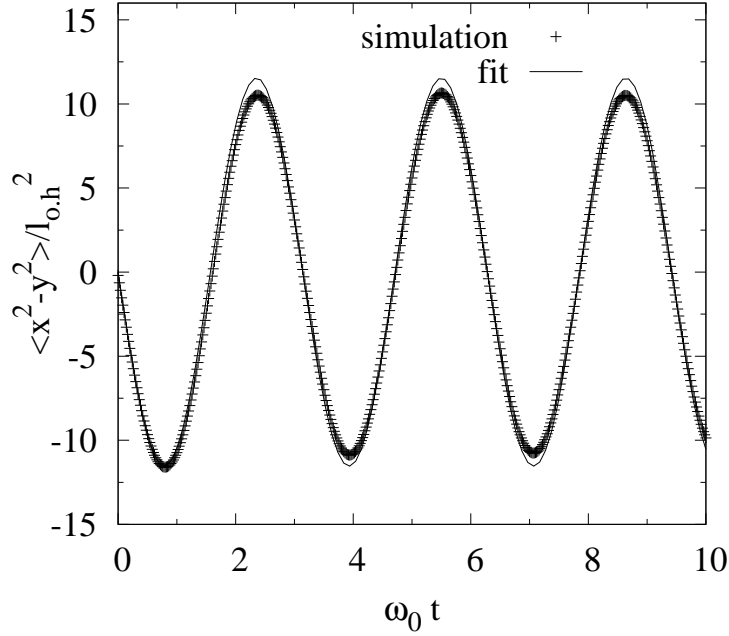


FIG. 4.10 – $\langle x^2 - y^2 \rangle(t)$ obtenue par la simulation numérique pour un gaz de $N = 1000$ particules avec une interaction $1/k_F a = -2.0$ et une température $T/T_F = 2$ correspondant au cas Boltzmann. Cette simulation est comparée à la valeur théorique Eq. (4.60).

4.3.5 Réponse du mode quadrupolaire

Si l'on prend en compte les effets de la statistique de Fermi, les équations ne sont plus solubles analytiquement (cas avec collisions) et il nous faut suivre numériquement l'évolution temporelle du moment quadrupolaire $\tilde{Q}(t) = \langle x^2 - y^2 \rangle$. Les résultats décrits dans le paragraphe précédent ne sont valables qu'à haute température et il peut être intéressant de commencer par étudier l'effet de la température. On montre (Fig. 4.11) les résultats obtenus pour différentes températures.

Contrairement aux modes de Kohn et de respiration, le mode quadrupolaire est amorti et rejoint l'équilibre ($Q \rightarrow 0$) après un certain temps. Aux hautes températures ($T/T_F \geq 1$), le système est si dilué qu'il se trouve dans le régime sans collision ($\omega_0 \tau_{coll} \gg 1$, τ_{coll} étant le temps moyen entre deux collisions pour un atome). Dans ce cas, il faut beaucoup d'oscillations avant que le système ne retourne à l'équilibre. Pour des températures plus basses, le mode est amorti à cause d'un taux de collisions élevé ($\omega_0 \tau_{coll} \sim 1$), mais le système n'est pas encore dans le régime hydrodynamique ($\omega_0 \tau_{coll} \ll 1$) où le mode serait à nouveau non amorti.

Pour l'analyse des résultats, il est utile de déterminer la transformée de Fourier de l'observable temporelle ($\tilde{Q}(t)$ pour $t < 0$) :

$$Q(\omega) = \int_0^\infty dt \tilde{Q}(t) e^{i\omega t} \quad (4.61)$$

et plus particulièrement la fonction de réponse du système, c'est à dire la partie imaginaire de $Q(\omega)$. Numériquement, elle peut être facilement obtenue à partir des résultats numériques pour $\tilde{Q}(t)$ en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) [80]. Pour

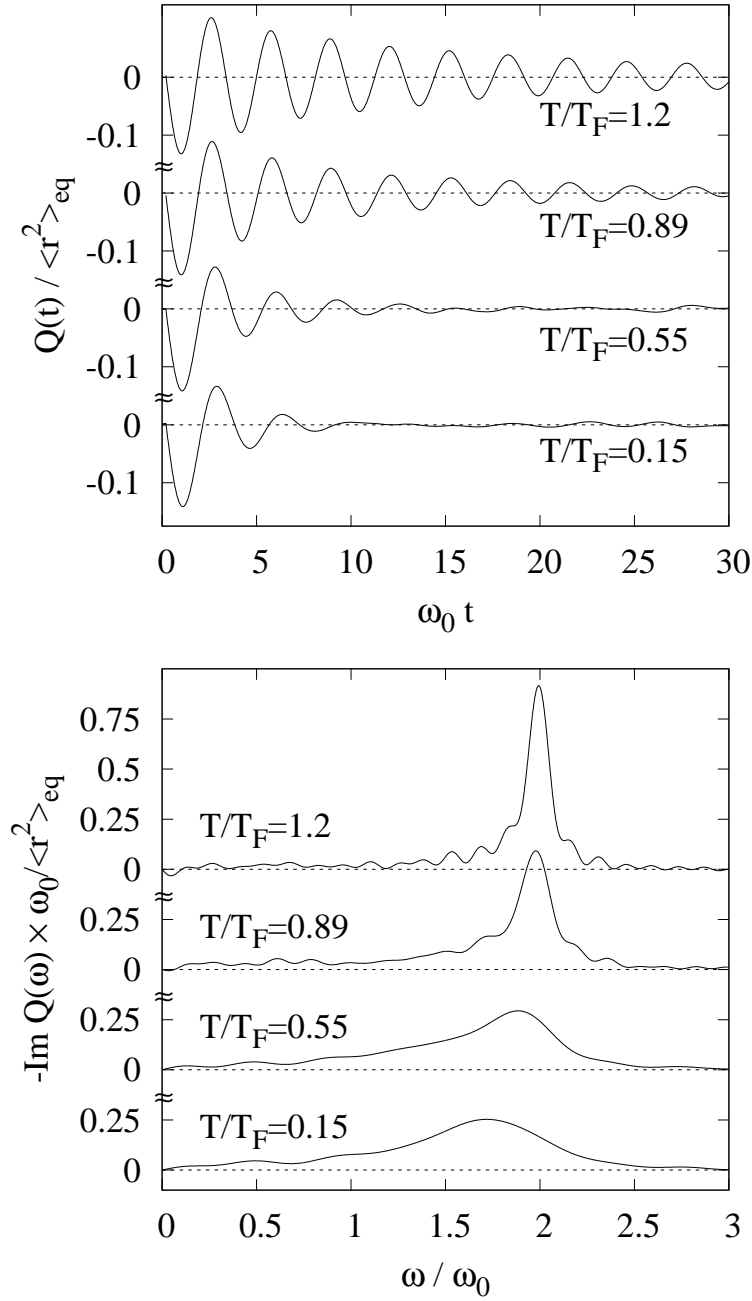


FIG. 4.11 – Haut : Réponse quadrupolaire du système ($N = 10000$ et $(k_F a)^{-1} = -0.5$ à une excitation du type (Eq. (4.55)) avec $c = 0.2m\omega_0$ pour différentes températures. On voit que l'amortissement peut être important ($T/T_F = 0.15$) ou beaucoup plus faible ($T = 1.20T_F$). Bas : Transformées de Fourier correspondantes.

exemple, on montre les transformées de Fourier des résultats discutés précédemment (Fig 4.11). A partir du spectre de Fourier, on peut voir clairement que le spectre du mode dans le régime sans collision, *i.e.* à hautes températures, présente un pic étroit pour $\omega = 2\omega_0$, comme cela devrait être le cas pour un gaz idéal de fermions. Aux températures plus basses, le spectre est élargi et le centre est décalé vers des fréquences plus basses. En effet, pour ces températures, le système est plus proche du régime hydrodynamique où la fréquence d'oscillation devrait être $\omega = \sqrt{2}\omega_0$.

Bien sûr, le but est de déterminer les valeurs ω_q et Γ_q correspondant à la fréquence et à l'amortissement du mode quadrupolaire afin de quantifier ces effets. On pourrait penser que le moyen le plus simple d'obtenir des valeurs numériques serait de fitter la fonction réponse $\tilde{Q}(t)$ avec une oscillation amortie de la forme :

$$\tilde{Q}_{lor}(t) = X_0 e^{-\Gamma_q t} \sin(\omega_q t) \quad (4.62)$$

dont la fonction de réponse est donnée par la relation :

$$Im Q_{lor}(\omega) = -\frac{X_0}{2} \left[\frac{\Gamma_q^2}{(\omega + \omega_q)^2 + \Gamma_q^2} + \frac{\Gamma_q^2}{(\omega - \omega_q)^2 + \Gamma_q^2} \right]. \quad (4.63)$$

Cependant, dans le cas d'un fort amortissement, cet ansatz $\tilde{Q}_{lor}(t)$ ne reproduit pas les résultats numériques. En effet, la transformée de Fourier de cet ansatz est une lorentzienne qui a une forme très différente de la courbe obtenue par notre simulation numérique pour $T/T_F = 0.15$ ou 0.55 (Fig. 4.11). Par conséquent, afin d'analyser nos résultats, nous avons besoin d'un ansatz décrivant mieux la physique du problème.

4.3.6 Comparaison avec la méthode des moments

Dans la plupart des travaux théoriques sur les modes collectifs des gaz de fermions dans la phase normale, l'équation de Boltzmann n'est pas résolue numériquement mais il est néanmoins possible d'en déterminer une solution analytique approximative à l'aide de la méthode des moments que l'on a déjà décrite (Sec. 3.1).

En effet, si l'on part de l'équation de Boltzmann linéarisée (Eq. (3.13)) :

$$f_{eq}(1 - f_{eq}) \left(\dot{\Phi} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r \Phi - \nabla_r(V_T + U_{eq}) \cdot \nabla_p \Phi + \beta \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r \delta U \right) = -I[\Phi] \quad (4.64)$$

où la perturbation δU est le potentiel d'excitation (Eq. (4.55)) et que l'on combine avec la fonction test du mode radial quadrupolaire :

$$\Phi = [c_1(t)(x^2 - y^2) + c_2(t)(xp_x - yp_y) + c_3(t)(p_x^2 - p_y^2)] , \quad (4.65)$$

on obtient après évaluation des moments $\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (x^2 - y^2)$, $\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (xp_x - yp_y)$ et $\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (p_x^2 - p_y^2)$ de l'Eq. (4.64), le système d'équations pour les transformées de Fourier des coefficients $c_i(\omega)$:

$$\begin{cases} -i\omega c_1 - c_2 = 0 \\ 2c_1 - i\omega c_2 - 2c_3 = -\beta c \\ c_2 + (\frac{1}{\tau} - i\omega)c_3 = 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

La solution pour le coefficient $c_1(\omega)$ est immédiate :

$$c_1(\omega) = \frac{-\beta c(1 - i\omega\tau)}{(2\omega_0 - \omega^2) + i\omega\tau(\omega^2 - 4\omega_0)} . \quad (4.67)$$

$\tilde{Q}(t)$ s'évalue facilement :

$$\tilde{Q}(t) = \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(1-f) \Phi(x^2 - y^2) \quad (4.68)$$

$$= \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(1-f) c_1(x^2 - y^2)^2 . \quad (4.69)$$

Ce qui nous permet d'en trouver la transformée de Fourier :

$$Q(\omega) = -\frac{4c}{3m^2} \frac{E}{N} \frac{1 - i\omega\tau}{(2\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\tau(\omega^2 - 4\omega_0^2)} , \quad (4.70)$$

et donc sa partie imaginaire :

$$Im Q_{mom}(\omega) = -\frac{8c}{3m^2} \frac{E}{N} \frac{\omega\tau}{(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 + \omega^2\tau^2(\omega^2 - 4\omega_0^2)^2} \quad (4.71)$$

où $\frac{E}{N} = m\omega_0 \langle r^2 \rangle$ est l'énergie moyenne par atome à l'équilibre et τ correspond au temps de relaxation, déjà défini, qui dépend de la section efficace et de la distribution d'équilibre. Dans la structure de cette réponse, les fréquences du régime sans collision $\omega = 2\omega_0$ et du régime hydrodynamique $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ jouent un rôle important. On voit, de plus, que le fit ne dépendra que d'un seul paramètre τ contrairement aux fits par une sinusoïde amortie dans l'espace réel : l'optimisation dans la détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode s'en trouve améliorée. De plus, cette réponse n'est pas une lorentzienne, ce qui confirme que la structure de la réponse prédite théoriquement est plus complexe qu'une simple sinusoïde amortie.

4.3.7 Détermination de la réponse temporelle

Pour aller plus loin dans l'étude de la réponse par la méthode des moments, on peut déterminer la dépendance temporelle $\tilde{Q}_{mom}(t)$. Pour cela, on part de l'équation du mode quadrupolaire :

$$i\omega(\omega^2 - \omega_{cl}^2) - \frac{1}{\tau}(\omega^2 - \omega_h^2) = 0 \quad (4.72)$$

et l'on définit :

$$\tilde{\tau} \equiv \omega_0\tau \quad \text{et} \quad \Theta \equiv \left(1 + 9\tilde{\tau}^2 + 3\tilde{\tau}\sqrt{6 - 39\tilde{\tau}^2 + 192\tilde{\tau}^4}\right)^{1/3} \quad (4.73)$$

$$u_{\pm} \equiv \frac{1}{3\tau} \left(\Theta \pm \frac{1 - 12\tilde{\tau}^2}{\Theta} \right) . \quad (4.74)$$

L'équation des modes peut alors être réécrite sous la forme :

$$i\tau(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3) = 0 \quad (4.75)$$

où les racines ω_i sont données par les relations :

$$\begin{cases} \omega_1 = -i \left(\frac{1}{3\tau} + u_+ \right) \equiv -i\Gamma_1 \\ \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} u_- - i \left(\frac{1}{3\tau} - \frac{u_+}{2} \right) \equiv \omega_q - i\Gamma_q \\ \omega_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} u_- - i \left(\frac{1}{3\tau} - \frac{u_+}{2} \right) \equiv -\omega_q - i\Gamma_q. \end{cases} \quad (4.76)$$

Dans le domaine d'étude, Γ_1 et Γ_2 sont toujours négatifs, les pôles se situent donc dans le demi plan complexe inférieur. L'évaluation de la transformée de Fourier de la réponse $Q(\omega)$ par le théorème des résidus donne finalement :

$$\tilde{Q}_{mom}(t) = \frac{8c}{3\tau} \frac{E}{N} \left\{ \frac{(1 - \Gamma_1 \tau)}{\omega_q^2 + (\Gamma_q - \Gamma_1)^2} [e^{-\Gamma_q t} \cos(\omega_q t) - e^{-\Gamma_1 t}] - \frac{\omega_q^2 \tau + (\Gamma_1 - \Gamma_q)(1 - \Gamma_q \tau)}{\omega_q(\omega_q^2 + (\Gamma_q - \Gamma_1)^2)} \sin(\omega_q t) e^{-\Gamma_q t} \right\} \quad (4.77)$$

pour $t \geq 0$ et $\tilde{Q}_{mom}(t) = 0$ pour $t < 0$, ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\tilde{Q}_{mom}(t) = -A e^{-\Gamma_q t} \sin \omega_q t + B (e^{-\Gamma_q t} \cos \omega_q t - e^{-\Gamma_1 t}). \quad (4.78)$$

La dépendance temporelle est donc la superposition d'une oscillation amortie avec une fréquence ω_q et un amortissement Γ_q et d'un terme exponentiellement décroissant sans oscillation. On considérera que ω_q et Γ_q sont la fréquence et l'amortissement du mode quadrupolaire : pour la détermination expérimentale de ces quantités, les données sont habituellement fittées par une fonction dont la forme est similaire à l'Eq. (4.78) [59].

Un point particulièrement important à noter est que la fonction de réponse déterminée par la méthode des moments (Eq. (4.71)) ne dépend que d'un unique paramètre τ , ce qui signifie que toute la physique du problème est contenue dans le temps de relaxation τ . D'autre part, la présence d'un unique paramètre est aussi un avantage important car il facilite fortement la procédure de fit.

4.4 Etude de la réponse du système dans un cas particulier

Nous allons, dans un premier temps, détailler la démarche que nous avons réalisée pour comparer les réponses du système, et donc déterminer la fréquence et l'amortissement du mode et enfin conclure sur les différences entre notre approche et l'utilisation de la méthode des moments.

4.4.1 Comparaison des différentes réponses

Désormais, nous avons tous les éléments pour comparer la réponse du système avec les différentes formules provenant de la méthode des moments ou d'une relaxation simple (lorentzienne). Pour effectuer cette comparaison, nous avons considéré le cas (Fig. 4.12) d'un système de $N = 10000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.5$. La transformée de Fourier de notre simulation est tracée en traits pleins tandis que le fit par la formule de réponse (Eq. (4.71)) de cette simulation est représenté par des tirets longs et permet d'obtenir une valeur du temps de relaxation τ_{sim} . On a également fait figurer en pointillés la courbe obtenue à partir de la méthode des moments : il s'agit de la formule (Eq. (4.71)) où l'unique paramètre τ est déterminé par la méthode des moments. On le note dans ce cas τ_{mom} et

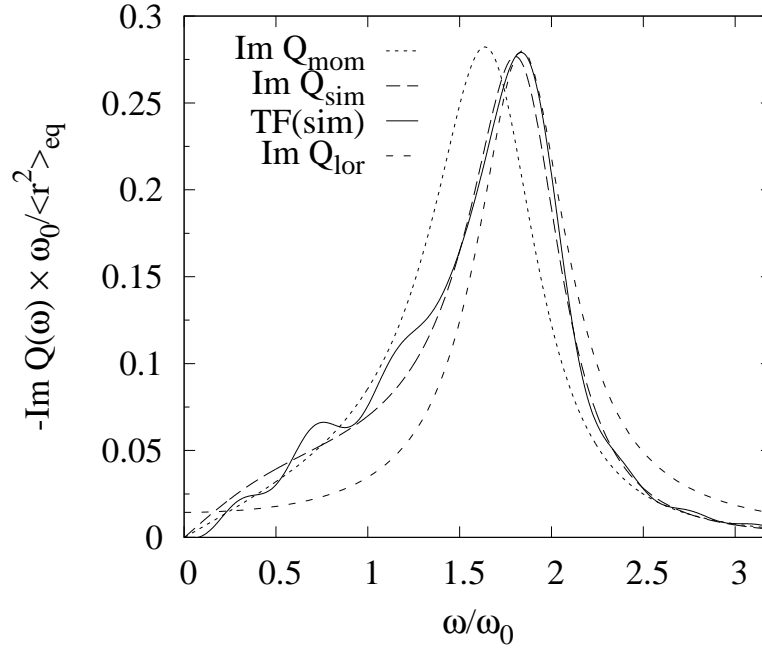


FIG. 4.12 – Transformée de Fourier de notre simulation (trait plein) comparé à Eq. (4.71) où le paramètre τ est donné par la simulation (tirets longs), par la méthode des moments (tirets courts) ou par une lorentzienne (tirets courts). Le système est un gaz de $N = 10000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.5$.

l'on voit déjà qu'il diffère de τ_{sim} . Enfin, à titre d'exemple, on a aussi représenté en tirets courts une lorentzienne. La comparaison entre la transformée de Fourier de nos résultats et $Q_{lor}(\omega)$ montre clairement que la structure de $Q_{lor}(\omega)$ n'est pas suffisante pour décrire à la fois la position, la largeur et la hauteur du pic. La fréquence et l'amortissement ne peuvent donc pas être correctement extraits de cette simulation. Physiquement, cela signifie, comme nous l'avons déjà signalé, que la dépendance temporelle de $\tilde{Q}_{lor}(t)$ n'est pas assez riche pour décrire le système. L'accord avec la réponse par la méthode des moments (Eq. (4.71)) est par contre excellent. Comme on peut le voir, la hauteur du pic ainsi que la forme générale de la courbe sont en parfait accord. On peut alors extraire la fréquence et l'amortissement du mode à partir du seul paramètre de fit : le temps de relaxation τ . Néanmoins, on voit que même si ce paramètre est déterminé de manière unique pour un potentiel chimique, une température et une interaction donnés, le paramètre τ obtenu par le fit de la simulation et celui obtenu par la méthode des moments sont différents. En effet, si l'on essaie de fitter le résultat numérique avec une fonction de la forme de l'Eq. (4.71), avec τ comme paramètre de fit, on peut très bien reproduire la fonction de réponse numérique. Néanmoins, le paramètre obtenu τ_{sim} est plus grand d'environ 30% que celui obtenu par la méthode des moments. Ainsi, cette dernière permet de rendre compte globalement de la réponse du système mais ne donne pas le bon temps de relaxation. Comme nous le verrons par la suite, on observe une déviation significative entre la méthode des moments et nos simulations de manière systématique. La conséquence directe est que l'on obtient une fréquence et un amortissement différents de ceux obtenus par la méthode des moments.

méthode	$\omega_0\tau$	ω_q/ω_0	Γ_q/ω_0
moments	0.451	1.676	0.353
simulation	0.587	1.787	0.336

TAB. 4.1 – Temps de relaxation, fréquence et amortissement du mode quadrupolaire obtenus par la méthode des moments et à partir des résultats du fit de la simulation numérique avec une fonction de la forme Eq. (4.71), correspondant aux courbes en pointillés et en tirets longs dans la figure 4.12.

4.4.2 Fréquence et amortissement du mode

Comme nous venons de le voir, la méthode des moments permet de rendre compte de la structure de la réponse du système mais pas de déterminer correctement le temps de relaxation du gaz τ . Or, dans la méthode des moments, le temps de relaxation est le seul paramètre : il détermine de manière unique la fréquence et l'amortissement du mode. La conséquence d'une erreur dans la détermination de τ se répercute donc forcément sur ω_q et Γ_q . D'après les équations Eq. (4.76) et (4.78), la fréquence du mode collectif ω_q et l'amortissement associé Γ_q sont connus en fonction de τ :

$$\begin{cases} \omega_q = \frac{\sqrt{3}}{2}u_- \\ \Gamma_q = \frac{1}{3\tau} - \frac{u_+}{2} \end{cases} \quad (4.79)$$

On montre (Table 4.1) une comparaison entre la fréquence et l'amortissement du mode pour les valeurs de τ obtenues lors de la simulation précédente (Fig. 4.12). On constate que les valeurs du paramètre τ peuvent être très différentes et induire un écart dans la détermination de la fréquence et de l'amortissement.

4.4.3 Erreurs sur la fréquence et l'amortissement

L'écart entre les fréquences et les amortissements obtenus à l'aide de τ_{sim} et τ_{mom} peut être quantifié de manière plus précise en cherchant à déterminer quel est l'écart $\Delta\omega_q$ sur la fréquence pour une erreur $\Delta\tau$ sur le temps de relaxation. Pour cela on part une nouvelle fois de l'équation des modes :

$$i\omega(\omega^2 - \omega_{cl}^2) - \frac{1}{\tau}(\omega^2 - \omega_h^2) = 0, \quad (4.80)$$

on pose $\omega = \omega_q - i\Gamma_q$, et on cherche l'erreur associée à une variation $\Delta\tau$ pour ω_q et Γ_q . La séparation entre partie réelle et partie imaginaire de l'équation des modes nous donne le système :

$$\begin{cases} \omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_h^2 = 2\Gamma_q(\frac{1}{\tau} + \Gamma_q) \\ -\Gamma_q(3\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_{cl}^2) = \frac{1}{\tau}(\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_h^2), \end{cases} \quad (4.81)$$

dont la dérivée logarithmique de chacune des équations permet d'établir les deux équations :

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_q}{\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_{cl}^2} \delta\omega_q &= \frac{-\delta\tau}{\tau + \Gamma_q\tau^2} + \left[\frac{1}{\Gamma_q} + \frac{\tau}{1 + \Gamma_q\tau} + \frac{2\Gamma_q}{\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_{cl}^2} \right] \delta\Gamma_q \\ \left[\frac{6\omega_q}{3\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_{cl}^2} - \frac{2\omega_q}{\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_h^2} \right] \delta\omega_q &= -\frac{\delta\tau}{\tau} + \left[\frac{1}{\Gamma_q} + \frac{2\Gamma_q}{3\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_{cl}^2} - \frac{2\Gamma_q}{\omega_q^2 - \Gamma_q^2 - \omega_h^2} \right] \delta\Gamma_q \end{aligned}$$

que l'on notera, en identifiant terme à terme, sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} A_1 \delta \omega_q = A_2 \delta \Gamma_q + A_3 \delta \tau \\ B_1 \delta \omega_q = B_2 \delta \Gamma_q + B_3 \delta \tau \end{cases} \quad (4.82)$$

On obtient alors :

$$\Delta \omega_q = \left| \frac{A_2 A_1 B_3 - A_3 B_1}{A_1 A_2 B_1 - A_1 B_2} + \frac{A_3}{A_1} \right| \Delta \tau \quad \text{et} \quad \Delta \Gamma_q = \left| \frac{A_1 B_3 - A_3 B_1}{A_2 B_1 - A_1 B_2} \right| \Delta \tau. \quad (4.83)$$

Dans le cas de la simulation précédente (Fig. 4.12), on peut ainsi estimer les erreurs sur la fréquence et l'amortissement (Table 4.1) pour $\Delta \tau = 10\%$:

$$\begin{cases} \omega_q = (1.676 \pm 0.046) \omega_0 \\ \Gamma_q = (0.353 \pm 0.053) \omega_0 \end{cases} \quad (4.84)$$

On voit que les barres d'erreurs ne permettent pas forcément d'inclure les résultats de la simulation et par ailleurs donnent également une part d'erreurs dans la mesure par la méthode des moments, notamment pour l'amortissement. Cette erreur sur le paramètre τ peut donc avoir des conséquences importantes sur l'interprétation physique du comportement du système.

4.5 Comparaison sur une gamme de température

Dans la section précédente, nous avons comparé la réponse du système obtenue par la simulation numérique avec la réponse obtenue par la méthode des moments pour une température et une interaction fixées. Afin d'étudier l'influence de ces deux paramètres, on réalise le même traitement sur une gamme étendue de températures et pour différentes interactions. Ainsi, nous allons présenter les résultats obtenus lorsque la température varie entre $0.2 T_F$ et T_F pour trois interactions différentes $(k_F a)^{-1} = -0.1, -0.5$ et -1.0 .

4.5.1 Taux de collisions sur une gamme de température

Avant de déterminer la réponse du système, il est important de savoir si le taux de collisions obtenu par notre simulation est conforme à la prédiction théorique donnée par simulation Monte Carlo. On a représenté (Fig. 4.13) le résultat du taux de collisions avec et sans prise en compte du blocage de Pauli pour les deux interactions extrêmes. On remarque, comme on s'y attend intuitivement, que le nombre de collisions est bien plus important, pour une température donnée, dans le cas d'une interaction forte. Dans tous les cas, le taux de collisions passe par un maximum pour $T \sim 0.4 T_F$. En effet, pour les basses températures, le nombre de collisions géométriquement possibles ($N_{coll}^{(+blocked)}$) est très élevé mais le blocage de Pauli est très important, ce qui réduit considérablement le nombre de collisions effectives. A haute température, le blocage de Pauli ne joue quasiment plus aucun rôle mais le nombre de collisions est lui aussi beaucoup moins élevé. Donc, la compétition entre ces deux effets conduit à un maximum qui se situe vers $0.4 T_F$.

Le résultat obtenu (Fig. 4.13) par la simulation est très satisfaisant sur la gamme de température étudiée. Néanmoins, à cause d'une incertitude sur l'échantillonnage de l'espace des phases par notre programme pour les très basses températures $T < 0.2 T_F$, nous avons

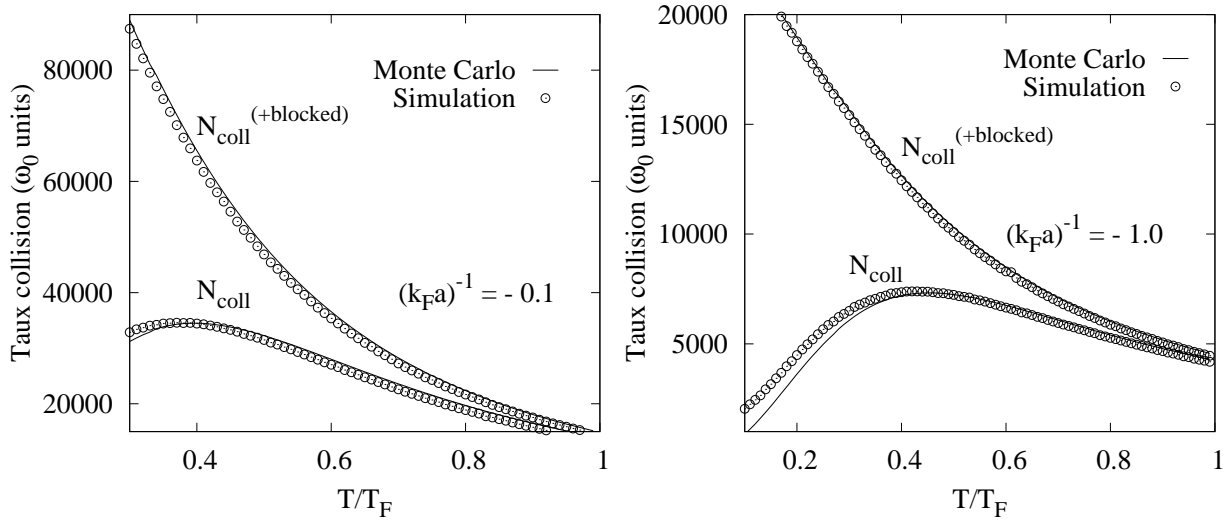


FIG. 4.13 – Taux de collisions en fonction de la température pour une interaction forte $(k_F a)^{-1} = -0.1$ (gauche) et faible $(k_F a)^{-1} = -1.0$ (droite). Le taux de collisions obtenu par la simulation numérique et comptage des collisions (cercles vides) est comparé au taux de collisions calculé par le Monte Carlo (trait plein). Dans les deux cas, on regarde le cas avec ou sans prise en compte du blocage de Pauli. Dans le cas d’une interaction faible, il y a une légère déviation pour les faibles températures et avec blocage de Pauli. Ce cas met en évidence la difficulté de décrire l’espace des phases (donc le blocage de Pauli) pour les températures très faibles. Partout ailleurs, l’accord est parfait entre la formule théorique et notre simulation.

choisi de restreindre l'étude à T compris entre $0.2T_F$ et T_F . En effet, comme on peut le voir (Fig. 4.13), le taux de collisions obtenu par simulation est supérieur au taux théorique pour les faibles températures, notamment dans le cas du gaz en interaction faible. Cet écart est essentiellement dû à une difficulté d'échantillonnage de l'espace des phases pour les faibles températures. On pourrait améliorer le taux de collisions en diminuant la largeur des gaussiennes, mais cela impliquerait d'augmenter le nombre de particules tests (pour conserver $w_r^3 N_{test}$ constant). Par conséquent, nous avons choisi de nous concentrer sur un domaine de température compris entre $0.2T_F$ et T_F où le taux de collisions est correctement décrit par notre programme sans aucune adaptation. De plus, proche de l'unitarité, la température critique d'apparition de la phase superfluide est $T_C \simeq 0.3T_F$, il n'est donc pas cohérent de regarder la réponse du système pour $T < 0.3T_F$ dans le cas $(k_F a)^{-1} = -0.1$.

Ainsi, la description du taux de collisions, donnée par notre simulation, est correcte sur la gamme de température et pour toutes les interactions considérées. On peut donc appliquer toute l'étude réalisée précédemment pour une température particulière (Sec. 4.4) de manière systématique.

4.5.2 Temps de relaxation du gaz d'atomes

L'étude du temps de relaxation τ permet de déterminer l'évolution temporelle du gaz. Il dépend fortement du nombre de collisions dans le gaz et nécessite donc une bonne description des collisions dans le nuage d'atomes (Sec. 4.5.1). De plus, nous avons vu que notre méthode d'analyse permettait de déduire le temps de relaxation τ de la réponse du gaz dans l'espace de Fourier, τ étant l'unique paramètre de l'analyse (Sec. 4.4.1) (c'est-à-dire que l'on retrouve complètement la forme de la réponse en jouant uniquement sur cet unique paramètre pour une gamme de températures à différentes interactions).

On présente (Fig. 4.14) la valeur de $1/\tau$ obtenue en fonction de la température et pour chaque interaction considérée. Il est important de noter que pour obtenir un seul point de ces courbes, on doit simuler la réponse du gaz de $N = 10000$ particules et $N_{test} = 5$ particules tests par particule à une excitation du mode quadrupolaire dans un piège sphérique, c'est-à-dire en pratique 24 heures de calcul sur un ordinateur standard actuel. Une fois cette réponse obtenue, on en prend la transformée de Fourier que l'on fitte avec l'Eq. (4.71). Ce fit avec un seul paramètre nous donne la valeur du temps de relaxation τ . Il résulte de cette étude systématique une légère dispersion des résultats due notamment au fit de la transformée de Fourier. Néanmoins, l'écart pour une valeur de τ entre deux points successifs est bien inférieure aux effets que l'on cherche à regarder, c'est à dire l'écart entre la valeur de τ_{sim} donnée par la simulation et celle τ_{mom} donnée par la méthode des moments.

On trouve (Fig. 4.14) que le temps de relaxation donné par la simulation est systématiquement plus grand de 30% que celui donné par la méthode des moments. Le comportement global de τ en fonction de la température est le même pour la simulation et pour la méthode des moments, mais quantitativement, les deux méthodes ont un désaccord de l'ordre de 30% sur toute la gamme de température où notre simulation numérique peut être considérée comme fiable ($T > 0.2T_F$). Ce point est très important dans le sens où cela implique une valeur de la fréquence ω_q et de l'amortissement Γ_q très différente de celles données par la méthode des moments.

Ce désaccord vient sans doute, entre autres, du fait que la méthode des moments donne seulement une moyenne du temps de relaxation : à partir de l'approximation de densité locale, on peut définir à chaque point \mathbf{r} du système, un temps de relaxation $\tau(\mathbf{r})$ correspon-

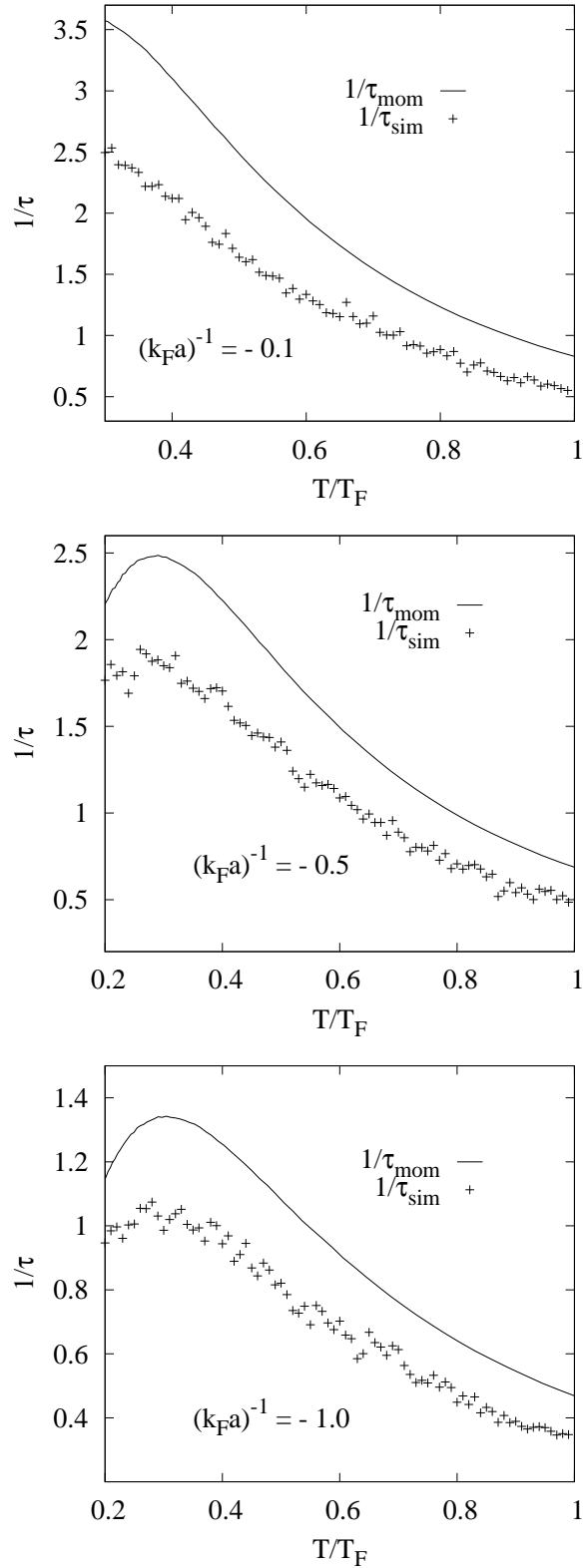


FIG. 4.14 – Comparaison de $1/\tau_{mom}$ et $1/\tau_{sim}$ en fonction de la température pour différentes valeurs de l'interaction d'un système de $N = 10000$ particules. $1/\tau_{mom}$ est obtenu à partir de la méthode des moments, tandis que chaque point représente une valeur de $1/\tau_{sim}$ obtenue à partir de la simulation numérique. La légère dispersion des résultats est due à la transformée de Fourier et au fit correspondant. Néanmoins, l'écart entre deux points est bien plus faible que l'écart avec la courbe des moments. On observe pour chaque interaction un écart systématique de l'ordre d'environ 30% entre la méthode des moments et la simulation.

dant à celui d'un gaz uniforme ayant une densité $\rho(\mathbf{r})$. On peut imaginer que ce temps de relaxation pourrait être très différent selon la région du système dans laquelle on se trouve. En particulier, loin du centre, le gaz est très dilué et le temps de relaxation dans cette région sera beaucoup plus grand qu'au centre. Bien sûr, dans la moyenne du temps de relaxation effectuée par la méthode des moments, la partie éloignée du centre a un poids plus important que le coeur du gaz, mais cela ne suffit peut-être pas. Si le poids n'est pas suffisant, le temps de relaxation moyen τ est plus faible qu'il ne devrait être. Ainsi, on obtient un paramètre $1/\tau$ trop important, comme on l'observe sur la figure (Fig. 4.14) dans le cas d'une méthode des moments où l'on ne prend en compte que les moments d'ordre 2. Nous verrons que l'on peut améliorer ce résultat en prenant en compte les moments d'ordre supérieurs (Sec. 4.6). En effet, dans l'exemple du mode quadrupolaire, un temps de relaxation dépendant du point de l'espace \mathbf{r} signifie que le gaz serait plus ou moins hydrodynamique au centre et dans un régime sans collision dans les régions plus diluées. Ceci signifie alors que la déformation de la surface de Fermi est plus forte loin du centre du piège. Il paraît alors naturel d'inclure dans la fonction test pour la fonction de distribution perturbée, en plus du terme standard ($\propto p_x^2 - p_y^2$) décrivant la déformation de la surface de Fermi, un terme $\propto r^2(p_x^2 - p_y^2)$ qui est un moment d'ordre 4 prenant en compte la dépendance en r .

4.5.3 Fréquence et amortissement du mode quadrupolaire

Comme nous venons de le voir (Sec. 4.5.2), la simulation numérique donne systématiquement un temps de relaxation τ plus grand que celui obtenu par la méthode des moments. Comme la fréquence ω_q et l'amortissement Γ_q du mode quadrupolaire sont paramétrisés par ce temps de relaxation τ , on peut se demander à quel point cet écart sur la valeur de τ affectera les résultats pour ω_q et Γ_q . Comme nous sommes intéressés principalement par le régime intermédiaire ($\omega\tau \sim 1$) entre les limites hydrodynamique et sans collision, on peut en effet penser qu'une différence de 30% sur τ peut complètement changer la dépendance en température de ω_q et Γ_q , comme nous l'avons déjà observé dans un cas particulier (Sec. 4.4.2).

On peut ainsi constater (Fig. 4.15) que le résultat numérique reste beaucoup plus proche de la limite sans collision pour des températures beaucoup plus basses que les résultats obtenus par la méthode des moments. En fait, même des erreurs plus faibles sur le paramètre τ peuvent avoir un effet non négligeable sur ω_q et Γ_q . On observe par exemple (Fig. 4.15) les barres d'erreurs que l'on obtient si l'on suppose une erreur de 10% sur τ . Même si, au regard de l'accord entre la simulation et le taux de collisions théorique, on peut raisonnablement penser que notre erreur sur la détermination du temps de relaxation ne dépasse pas 10%. Chaque barre d'erreur est déterminée à partir des équations Eqs. (4.83) pour la valeur de τ obtenue précédemment. Or, nous avons remarqué que ces valeurs de τ ont une dispersion due à la méthode d'analyse. Par conséquent, on obtient le même genre de comportement pour les courbes $\omega_q \pm \Delta\omega_q$ et $\Gamma_q \pm \Delta\Gamma_q$ sur la figure (Fig. 4.15). L'étude des barres d'erreurs permet de voir que l'incertitude sur la détermination de la fréquence et de l'amortissement est plus importante dans le cas des systèmes en forte interaction. En effet, une erreur de 10% sur le temps de relaxation τ dans le cas $(k_F a)^{-1} = -1.0$ engendre une barre d'erreur bien moins importante que pour une interaction forte $(k_F a)^{-1} = -0.1$. Cet effet s'accroît encore lorsque l'on s'approche de la température critique $T_C \simeq 0.3T_F$ où les barres d'erreurs augmentent fortement même si le temps de relaxation τ , la fréquence ω_q et l'amortissement Γ_q restent finis.

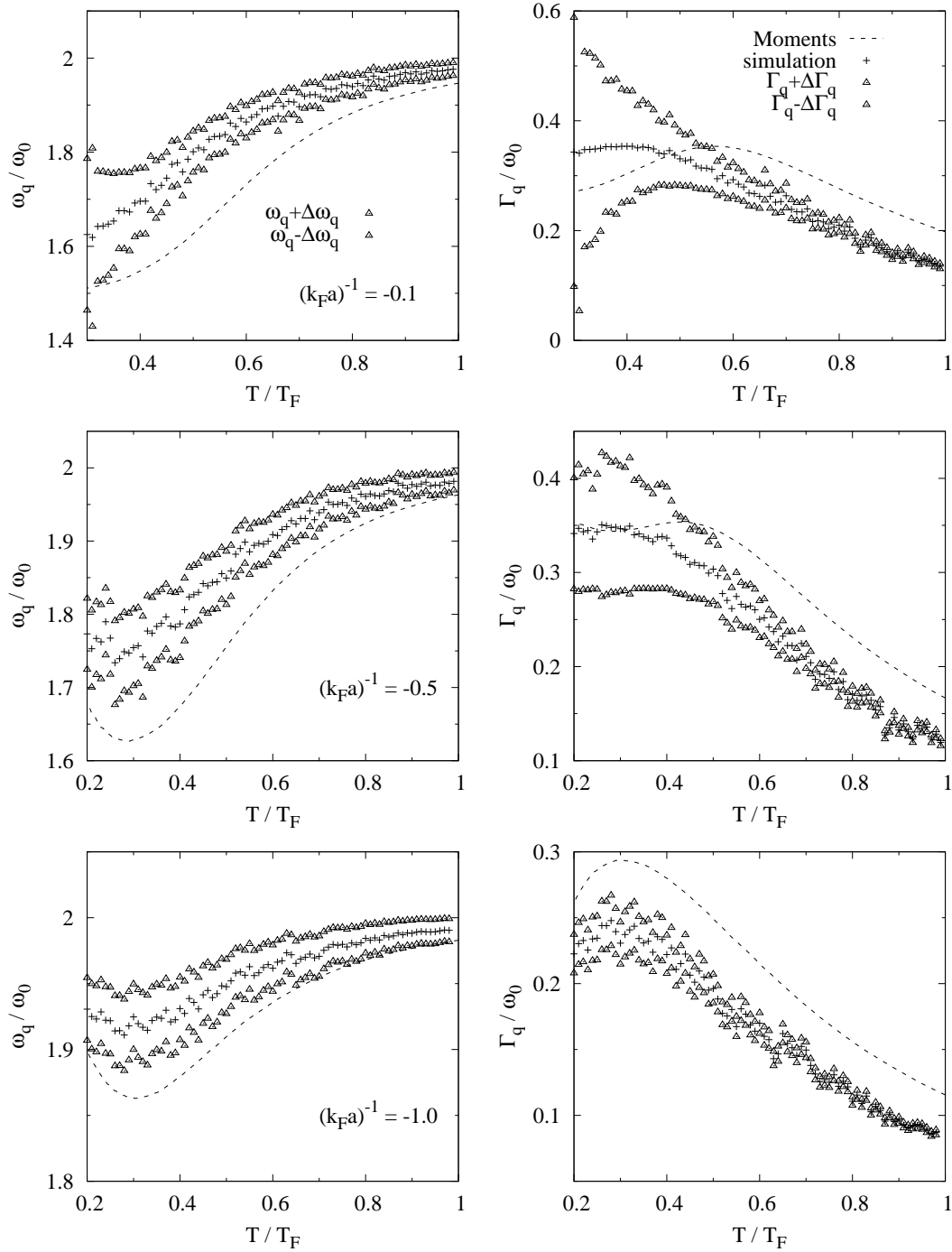


FIG. 4.15 – Comparaison de la fréquence et de l’amortissement en fonction de la température déterminés soit par la méthode des moments soit par nos simulations. Le système est un gaz de $N = 10000$ particules, proche de l’unitarité $(k_F a)^{-1} = -0.1$, dans un régime d’interaction intermédiaire $(k_F a)^{-1} = -0.5$ ou faible $(k_F a)^{-1} = -1.0$. A titre indicatif, on donne aussi la barre d’erreur à 10% sur le temps de relaxation pour calcul de la fréquence et de l’amortissement.

4.6 Méthode des moments d'ordre supérieur

Les résultats numériques de la détermination de la réponse d'un gaz de fermions froids à une excitation ont permis de mettre en évidence un écart systématique entre la valeur du temps de relaxation obtenue par la méthode des moments (Sec. 3.6) et par l'analyse de la simulation numérique (Sec. 4.5.2). Ainsi, le paramètre τ est toujours plus important par la méthode des moments. Nous avons déjà vu une explication possible (Sec. 4.5.2) : dans l'approximation de densité locale, il existe un temps de relaxation $\tau(\mathbf{r})$ pour chaque point \mathbf{r} du gaz qui est bien plus important loin du centre. Si la pondération n'est pas suffisante, le temps de relaxation moyen est plus petit que la valeur réelle. Ainsi, si l'on considère les moments d'ordre supérieur, on peut s'attendre à obtenir un temps de relaxation plus important. Il est donc intéressant de voir si cette méthode permet de se rapprocher ou même de confirmer la simulation de l'équation de Boltzmann.

4.6.1 Détermination de la réponse

Pour inclure les effets des moments d'ordre supérieur, on part donc d'une nouvelle fonction test :

$$\begin{aligned} \Phi = & \{c_1(x^2 - y^2) + c_2(xp_x - yp_y) + c_3(p_x^2 - p_y^2) \\ & + c_4r^2(x^2 - y^2) + c_5p^2(x^2 - y^2) + c_6\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(x^2 - y^2) \\ & + c_7r^2(xp_x - yp_y) + c_8p^2(xp_x - yp_y) + c_9\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(xp_x - yp_y) \\ & + c_{10}r^2(p_x^2 - p_y^2) + c_{11}p^2(p_x^2 - p_y^2) + c_{12}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(p_x^2 - p_y^2)\} . \end{aligned} \quad (4.85)$$

La restriction de Φ à ses trois premiers termes permet de retrouver l'ansatz pour la méthode des moments initiale. On repart ensuite de l'équation de Boltzmann linéarisée qui s'écrit :

$$\dot{\Phi} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Phi - \nabla_{\mathbf{r}} V_T(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \Phi + \beta \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta U = -I[\Phi] \quad (4.86)$$

avec

$$V_T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 \quad \text{et} \quad \delta U = \frac{c}{2}(x^2 - y^2)\delta(t) \quad (4.87)$$

le potentiel de piège harmonique sphérique et la perturbation pour exciter le mode quadrupolaire.

Etant donnée la lourdeur des calculs, nous avons écrit, la détermination de la réponse du gaz, de manière plus systématique et plus concise que précédemment. Pour cela, on se place dans la base telle que :

$$\Phi = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}) e^{-i\omega t} , \quad (4.88)$$

que l'on note aussi :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{12} c_i \varphi_i \quad (4.89)$$

où, par exemple, $\varphi_1 = (x^2 - y^2)$.

L'écriture de la fonction test dans cette base permet d'évaluer les différents termes de l'équation de Boltzmann, ainsi on a :

$$\dot{\Phi} = -i\omega\Phi \equiv \mathbf{v}_1 \quad (4.90)$$

pour le premier terme,

$$\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Phi = (0, 2c_1, c_2, 0, c_6, 2c_4, 2c_4, 2c_5 + c_9, 2c_6 + 2c_7, c_7, c_8 + c_{12}, c_9 + 2c_{10})e^{-i\omega t} \equiv \mathbf{v}_2 \quad (4.91)$$

pour le second terme,

$$-m\omega_0^2 \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \Phi = (c_2, 2c_3, 0, c_6 + c_7, c_8, 2c_5 + c_9, c_9 + 2c_{10}, 2c_{11}, 2c_8 + 2c_{12}, c_{12}, 0, 2c_{11})e^{-i\omega t} \equiv \mathbf{v}_3 \quad (4.92)$$

pour le troisième terme et

$$\beta \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta U = c\beta\delta(t)(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \equiv \mathbf{v}_4 \quad (4.93)$$

pour l'excitation du mode.

Ensuite, la méthode des moments consiste à intégrer l'équation de Boltzmann (dans laquelle on a remplacé Φ par son expression) multipliée par un élément φ_i de la base, conduisant à un jeu de douze équations. La base des φ_i étant fermée sur l'application des termes du membre de gauche de l'équation de Boltzmann, on définit la matrice des moments $M = (m_{ij})_{1 \leq (i,j) \leq 12}$ par :

$$m_{ij} = \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(1-f) \varphi_i \varphi_j, \quad (4.94)$$

ce qui donne la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{4\langle x^2 \rangle}{m\beta\omega_0^2} & 0 & 0 & \frac{28\langle x^2 \rangle}{3m\beta\omega_0^2} & \frac{4m\langle x^4 \rangle}{\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{4m\langle x^2 \rangle}{3\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m\langle x^2 \rangle}{\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{4m\langle x^2 \rangle}{3\beta} & \frac{10m\langle x^2 \rangle}{3\beta} & \frac{10m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{3\beta} \\ 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{\beta} & \frac{28m^5\langle x^2 \rangle\omega_0^4}{3\beta} & 0 \\ \frac{28\langle x^2 \rangle}{3m\beta\omega_0^2} & 0 & 0 & \frac{84\langle x^6 \rangle}{5m\beta\omega_0^2} & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{5\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{15\beta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4m\langle x^2 \rangle}{\beta} & 0 & 0 & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{5\beta} & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4m\langle x^2 \rangle}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{15\beta} & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{15\beta} & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{8m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{15\beta} \\ 0 & \frac{10m\langle x^2 \rangle}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{15\beta} & \frac{14m\langle x^6 \rangle}{3\beta} & \frac{10m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} \\ 0 & \frac{10m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{10m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{14m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{15\beta} \\ \frac{4m\langle x^2 \rangle}{3\beta} & 0 & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{28m\langle x^6 \rangle}{15\beta} & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{6m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{5\beta} & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{15\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{15\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{28m^5\langle x^2 \rangle\omega_0^4}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{15\beta} & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{5\beta} & \frac{84m^7\langle x^6 \rangle\omega_0^6}{5\beta} & 0 \\ 0 & \frac{4m^3\langle x^2 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{8m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{15\beta} & \frac{4m^3\langle x^6 \rangle\omega_0^2}{3\beta} & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{15\beta} & 0 & 0 & 0 & \frac{28m^5\langle x^6 \rangle\omega_0^4}{15\beta} \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

avec la définition suivante :

$$\langle x^n \rangle = \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} x^n f. \quad (4.96)$$

Un exemple de calcul des coefficients de la matrice est donné en annexe (Annexe C). On peut appliquer cette matrice aux vecteurs \mathbf{v}_i pour déterminer les douze équations résultantes pour le membre de gauche de l'équation de Boltzmann. On obtient alors :

$$M(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = M_I \Phi \quad (4.97)$$

où M_I est la matrice pour le terme de collision :

$$M_I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 3M_2 & M_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}M_4 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{90}M_5 & \frac{1}{3}M_5 & \frac{1}{3}M_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}M_5 & M_5 & M_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}M_6 & M_6 & M_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}M_4 & 0 & 0 & 0 & M_8 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

pour laquelle on a défini les termes :

$$M_i = \frac{1}{5\pi^2 m} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty dq q^7 \frac{d\sigma}{d\Omega} \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 d\gamma' \frac{F_i}{[\cosh(\beta(E - \mu_0)) + \cosh(\beta k q \gamma / 2m)][\cosh(\beta(E - \mu_0)) + \cosh(\beta k q \gamma' / 2m)]} \quad (4.99)$$

avec :

$$\begin{aligned} F_1 &= \Theta \\ F_2 &= \frac{1}{3} r^2 \Theta \\ F_3 &= K \\ F_4 &= \frac{10}{9} r^2 k^2 \gamma^2 (1 - \gamma'^2) \\ F_5 &= r^4 \Theta \\ F_6 &= r^2 K \\ F_7 &= \left(\frac{k^2}{4} + q^2 \right)^2 \Theta + 4 \left(\frac{k^2}{4} + q^2 \right) \gamma^2 (1 - \gamma'^2) k^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} k^4 \left(4\gamma^2 (1 - \gamma'^2) - \gamma^2 (1 - \gamma^2) \right) \\ F_8 &= \frac{1}{36} k^2 r^2 (9\Theta + 28\gamma^2 (1 - \gamma'^2)) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \Theta &= 1 + 2\gamma^2 - 3\gamma^2 \gamma'^2 \\ K &= (q^2 + \frac{k^2}{4}) \Theta + 2k^2 \gamma^2 (1 - \gamma'^2). \end{aligned}$$

Tous ces termes ayant pour unité les unités du piège harmonique. Chacun des huit termes M_i est évalué par un Monte Carlo.

On cherche maintenant à déterminer l'observable physique importante :

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 - y^2 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(1-f) \Phi(x^2 - y^2) \\
 &= \int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(1-f) (x^2 - y^2) [c_1(x^2 - y^2) + c_4 r^2(x^2 - y^2) \\
 &\quad + c_5 p^2(x^2 - y^2) + c_9 \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(xp_x - yp_y)] e^{-i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

D'où l'on trouve la fonction de réponse du système, en prenant la partie imaginaire de :

$$Q_{mom,4}(\omega) = 4k_B T \left[c_1 \langle x^2 \rangle + \frac{7c_4 + 3c_5 + c_9}{3} \langle x^4 \rangle \right]. \tag{4.101}$$

Ainsi, pour obtenir la réponse du gaz $Im Q_{mom,4}(\omega)$, on doit évaluer les coefficients c_1 , c_4 , c_5 et c_9 . Au cours de l'étude précédente (Sec. 4.3.6), nous avons uniquement dû calculer le coefficient c_1 . A partir de cette étape, la résolution a été numérique.

4.6.2 Etude de la réponse

A partir de l'équation (4.101) obtenue précédemment, on détermine la réponse du système $Im Q_{mom,4}$. Pour cela, on résout numériquement le système matriciel (Eq. (4.97)) pour lequel on doit générer tous les coefficients M_i de la matrice de collision M_I par Monte Carlo. Remarquons que la détermination du coefficient M_1 revient au calcul de Monte Carlo utilisé pour la méthode des moments d'ordre 2. En effet, la restriction à un système 3×3 des trois premières lignes et colonnes de l'Eq. (4.97) est équivalent à la méthode des moments d'ordre 2.

Le premier résultat (Fig. 4.16) correspond à la réponse d'un système de $N = 10000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.5$ pour le mode quadrupolaire. Ce résultat avait déjà été présenté (Sec. 4.4.1) pour comparer la transformée de Fourier de la simulation (trait plein) et le fit à partir de la formule de la réponse donnée par la méthode des moments (tirets). Désormais, on ajoute la réponse obtenue par la méthode des moments d'ordre 4 (tirets longs) que l'on compare à la réponse obtenue par la méthode des moments d'ordre 2 (pointillés). Cette courbe montre de toute évidence le meilleur accord entre la simulation numérique et la méthode des moments d'ordre 4. En effet, contrairement à la méthode des moments d'ordre 2, la forme de la courbe (largeur et hauteur du pic) est aussi bien reproduite, mais la position du pic est plus proche de la valeur obtenue par la simulation.

Ce résultat permet de valider deux choses : tout d'abord, l'accord entre la méthode des moments d'ordre 4 et la simulation numérique n'étant *a priori* pas évident en premier lieu, on peut raisonnablement penser que le résultat obtenu dans les deux cas est correct. En effet, ces deux méthodes font appel à des calculs analytiques et des programmes numériques complètement différents, le seul point commun étant la théorie de transport contenue dans l'équation de Boltzmann sous-jacente au problème posé. Ensuite, nous avons montré que les moments d'ordre supérieur ont un poids non négligeable dans la détermination des observables physiques telles que le temps de relaxation. La prise en compte de ces moments permet de retrouver le comportement physique du système, il est donc nécessaire d'en tenir compte notamment pour la détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode collectif. On peut donc se demander comment, à partir de la méthode des moments d'ordre 4, déterminer la fréquence et l'amortissement du mode. En effet, pour l'instant notre étude

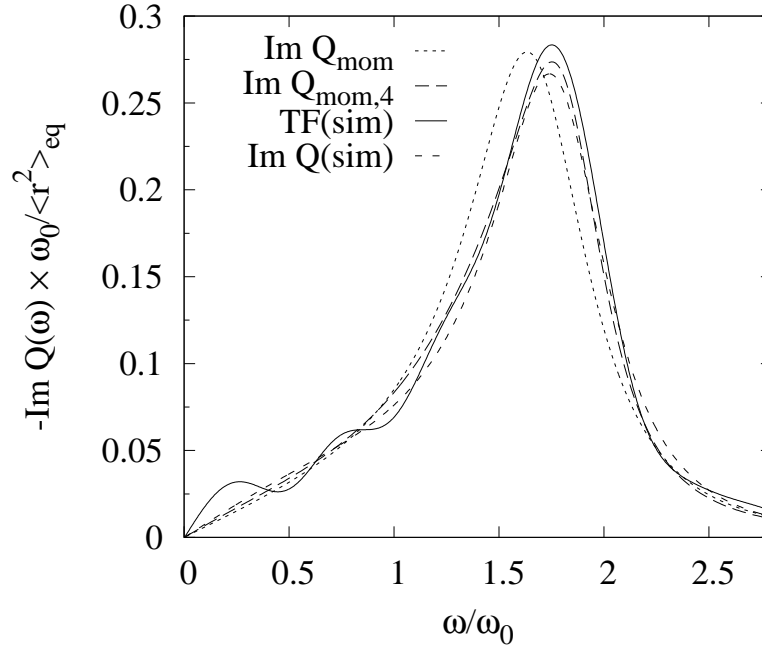


FIG. 4.16 – Transformée de Fourier de notre simulation (trait plein) comparée à la fonction de réponse obtenue par la méthode des moments à l'ordre 2 (Eq. (4.71)) et la méthode des moments à l'ordre 4 (Eq. (4.101)). Le système est un gaz de $N = 10000$ particules à $T = 0.4T_F$ et $(k_F a)^{-1} = -0.5$. Le fit obtenu par la méthode des moments d'ordre 4 est plus proche de la simulation numérique. Pour comparaison, on trace aussi le fit de la simulation numérique. On voit que l'accord de la méthode des moments d'ordre 4 est presque aussi bon que le fit avec la simulation numérique.

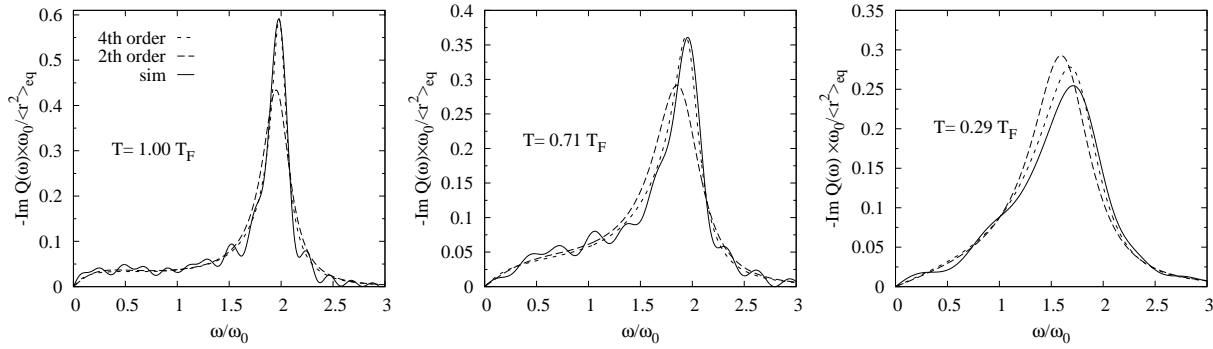


FIG. 4.17 – Comparaison de la réponse pour la simulation (traits pleins), la méthode des moments d'ordre 2 (tirets longs) et la méthode des moments d'ordre 4 (tirets courts) pour trois températures et une interaction constante $1/k_F a = -0.5$. On voit que l'accord entre méthode des moments d'ordre 4 et simulation est excellent, surtout à haute température. Pour les températures plus basses, il existe un léger écart, mais nous avons vu (Sec. 4.5.1) que la simulation numérique est moins satisfaisante pour ces températures.

permettait de déduire ω_q et Γ_q uniquement à partir du seul paramètre τ . La première idée serait donc de fitter la courbe obtenue par la formule (Eq. (4.71)) avec τ comme paramètre de fit afin d'obtenir un temps de relaxation effectif. Néanmoins, de manière rigoureuse, la réponse à l'ordre 4 est plus riche et dépend en fait de plusieurs paramètres. Ceci est conforté par le fait que les points expérimentaux ne sont jamais sur le cercle hydrodynamique donné par la méthode des moments d'ordre 2. La seule alternative correcte pour déterminer la fréquence et l'amortissement du mode est donc de les définir comme solutions du déterminant 12×12 de l'équation de Boltzmann pour la méthode des moments d'ordre 4, c'est-à-dire à partir de l'équation des modes généralisée. Toutefois, notre but est ici de valider à la fois notre simulation et la méthode des moments d'ordre 4 : une telle étude est donc réservée à un travail ultérieur. Afin de bien prouver que les deux approches coïncident, nous montrons (Fig. 4.17) nos résultats pour différentes températures : à nouveau, seules les basses températures (pour lesquelles notre simulation est légèrement moins satisfaisante) présentent un très faible écart. Pour les plus hautes températures, l'accord est excellent.

4.7 Perspectives

Dans le travail qui vient d'être présenté, nous avons uniquement considéré un système de $N = 10000$ particules dans un piège sphérique en négligeant le potentiel de champ moyen et les effets de milieu sur la section efficace dans le milieu. L'insuffisance de la méthode des moments au second ordre a été montrée par la comparaison avec les simulations numériques. Dans les études futures, on peut appliquer cette méthode numérique pour des cas plus réalistes. En particulier, afin d'atteindre le nombre typique d'atomes présents dans les expériences, nous devons augmenter N d'un facteur de l'ordre de $\sim 10 - 100$. Cependant, malgré la limitation due au temps de calcul, ceci pourrait *a priori* ne pas poser un énorme problème. En effet, si l'on augmente le nombre de particules N en gardant le rapport T/T_F constant, on doit considérer des largeurs de gaussiennes w_r et w_p plus importantes ($\propto N^{1/6}$) (les conditions sur les gaussiennes peuvent rester satisfaites pour le même nombre

de particules totales N [81]). Le temps de calcul augmentera alors uniquement à cause d'un taux de collisions plus important (la section efficace des particules tests étant alors plus importante). Un autre point concerne la géométrie du piège : les pièges expérimentaux ne sont pas sphériques mais allongés, ce qui ne cause aucun problème pour la propagation des particules. Dans le calcul du nombre d'occupation, en revanche, il sera probablement nécessaire de remplacer la largeur des gaussiennes w_r dans l'espace des positions par différentes largeurs w_x , w_y et w_z dans les trois directions de l'espace. Un autre avantage important de notre méthode numérique est que l'on pourra inclure facilement un potentiel anharmonique qui est toujours présent dans les expériences réelles.

Une autre possibilité sera d'inclure le champ moyen et la section efficace dans le milieu. Le champ moyen, qui dépend de la température T et du potentiel chimique μ , peut être exprimé comme une fonction de la densité et de la densité d'énergie locales, que l'on peut toutes les deux obtenir dans notre simulation. Le cas de la section efficace dans le milieu est bien plus compliqué car elle dépend de trop de variables pour être tabulée : $\sigma = \sigma(k = |\mathbf{p} + \mathbf{p}_1|/2, q = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|; \mu, T)$. Une solution à ce problème est de remplacer la dépendance en k et q de la section efficace dans le milieu par une simple paramétrisation pour laquelle on obtient le même temps de relaxation local $\tau(\mu, T)$. Nous avons vu dans la première partie de cette thèse qu'avec la méthode des moments à l'ordre 2, l'utilisation de la section efficace dans le milieu détruisait l'accord avec les données expérimentales car le temps de relaxation obtenu était trop faible. Or, nous avons montré que la simulation numérique donne un temps de relaxation plus important que la méthode des moments ; on peut donc espérer résoudre ce problème.

Enfin, d'autres possibilités concernent la généralisation à un gaz de Fermi polarisé ($f_{\uparrow} \neq f_{\downarrow}$) et aux systèmes superfluides. Néanmoins, ces questions nécessitent en premier lieu une étude théorique fondamentale plus approfondie.

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons étudié la dynamique des modes collectifs dans un gaz de fermions froids. Cette étude se place dans le contexte du BEC-BCS crossover et notre travail se concentre plus particulièrement sur la phase normale du côté BCS du BEC-BCS crossover. La possibilité de refroidir un gaz de fermions à des températures extrêmement basses permet de mettre en évidence des phénomènes purement quantiques tels que le blocage de Pauli et l'apparition d'une phase superfluide BCS. Les résultats expérimentaux suggèrent que la transition entre la phase superfluide et un régime de fluide normal est accompagnée d'un fort amortissement de l'oscillation des modes collectifs.

Le premier travail de cette thèse a été d'inclure les effets de milieu de manière consistante dans la propagation des particules décrite par l'équation de Boltzmann. L'inclusion de ces effets de milieu de type Hartree conduit à l'émergence d'une instabilité non physique pour les fortes interactions. Nous avons donc utilisé l'approximation de la matrice T qui est appropriée à la description d'un système en interaction forte, donc proche de l'unitarité. Ensuite, nous avons utilisé la méthode des moments qui permet de déterminer analytiquement l'équation des modes, c'est-à-dire un jeu d'équations vérifiées par la fréquence et l'amortissement du mode collectif. Ces deux quantités physiques ont alors été déterminées selon divers degrés d'approximation. On a ainsi pu voir successivement l'effet de la statistique de Fermi, de l'inclusion du champ moyen puis de la section efficace dans le milieu. Le premier résultat important concerne la détermination de la fréquence d'oscillation du mode radial quadrupolaire pour une interaction faible : contrairement à la prédiction théorique dans ce régime sans collision, la valeur expérimentale montrait de toute évidence un rapport de fréquence ω/ω_r supérieur à 2. Notre approche a permis, pour la première fois, de confirmer ce résultat expérimental. Nous avons aussi étudié le cas du mode ciseaux pour une interaction moyenne et à l'unitarité ainsi que les modes radial quadrupolaire et radial de respiration à l'unitarité. L'inclusion du champ moyen permet d'améliorer l'accord entre notre étude et les données expérimentales. On remarque notamment que sur toute la gamme de température, la forme des courbes représentant la fréquence et l'amortissement est plus satisfaisante. La courbe de la fréquence en fonction de l'amortissement, permettant de s'affranchir de l'incertitude sur la mesure de la température, n'a plus la forme d'un cercle, ce qui est plus proche avec les données expérimentales. L'inclusion de la section efficace dans le milieu a pour effet de compenser les améliorations obtenues par l'inclusion du champ moyen et de la statistique de Fermi. Cet effet est encore plus important à l'unitarité. On peut penser que pour de si fortes interactions, la description du gaz par l'équation de Boltzmann avec une telle section efficace n'est plus correcte ou que l'étude du système par la méthode des moments d'ordre 2 n'est pas suffisante.

Après avoir fait cette étude semi-numérique, nous avons voulu savoir si la méthode des moments utilisée permettait de décrire correctement le comportement du gaz. De plus, pour

comparer avec les résultats expérimentaux qui mettent en évidence des effets d'anharmonicité, il faut tenir compte de la forme réelle du piège magnéto-optique. Nous avons donc réalisé un code numérique de l'équation de Boltzmann pour déterminer l'évolution temporelle d'un gaz de fermions froids. La description de l'évolution des particules par l'équation de Boltzmann dans l'espace des phases se décompose en une partie propagative et une partie collisionnelle. Nous avons utilisé la méthode des particules tests afin d'avoir une description générale de l'espace des phases. Néanmoins pour éviter les problèmes numériques, il est nécessaire d'associer une largeur aux particules : chaque particule est donc représentée par une gaussienne dont on peut modifier la largeur pour déterminer la densité et le taux de collisions. La propagation des particules est, quant à elle, assurée par l'algorithme de Verlet qui permet de conserver l'énergie du système et de minimiser le nombre d'évaluations de la force. Nous avons aussi optimisé le pas de temps et le nombre de particules tests pour résoudre correctement les équations du mouvement. Le terme de collision est déterminé par la possibilité d'une collision géométrique pour deux particules avec une section efficace de collision d'onde s . Pour chaque collision, on évalue le taux d'occupation de l'état final ce qui permet de déterminer si la collision est bloquée ou non par le principe d'exclusion de Pauli. Dans un premier temps, nous avons décrit la dynamique d'un gaz de fermions sans champ moyen et avec une section efficace libre. En effet, notre étude initiale a montré que l'inclusion de la statistique de Fermi donne déjà une bonne idée de la fréquence et de l'amortissement du mode collectif en fonction de la température. Les premières simulations numériques ont donc concerné les modes de Kohn et monopolaire pour un gaz dans un piège sphérique harmonique. Ces modes sont non amortis et oscillent avec une fréquence égale ou double de celle du piège. Ceci constitue une vérification du théorème de Kohn et du comportement du mode monopolaire par notre programme. Par la suite, la majeure partie de notre travail a été de simuler le mode quadrupolaire pour un gaz de fermions froids. Contrairement aux deux premiers modes étudiés, celui-ci est amorti et sa fréquence d'oscillation dépend de la température et de l'interaction. L'analyse de nos résultats a été faite en utilisant le temps de relaxation τ comme unique paramètre de fit pour la fonction de réponse. Avec cette étude systématique, nous avons comparé la réponse donnée par notre programme avec celle donnée par la méthode des moments. Nous avons constaté que la méthode des moments permettait de retrouver la forme de la réponse mais pas la valeur du temps de relaxation. La méthode des moments semble donc contenir la physique déterminant la réponse mais sous-évalue le temps de relaxation τ . L'erreur sur le temps de relaxation est de l'ordre de 30%, ce qui engendre nécessairement un écart dans la détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode collectif. Comme nous l'avons montré, on peut évaluer l'erreur sur la fréquence et l'amortissement à partir de celle sur le temps de relaxation. La sous évaluation du temps de relaxation par la méthode des moments peut être due à l'approximation qui néglige les termes d'ordre supérieur ; ainsi nous avons choisi de vérifier si la prise en compte de ces termes d'ordre supérieur permettait de rapprocher les deux valeurs du temps de relaxation obtenues par la simulation et la méthode des moments initiale. Cette étude est beaucoup plus lourde et nécessite *a priori* l'introduction de plusieurs paramètres. Néanmoins, cette amélioration de la méthode des moments permet d'obtenir un excellent accord entre méthode des moments et simulation, et donc de valider les deux approches. Une telle investigation n'avait jamais été réalisée et montre la nécessité de considérer les moments d'ordre supérieur pour l'étude des modes collectifs par l'équation de Boltzmann d'un gaz de fermions dans la phase normale.

Enfin, une première extension de notre travail serait de déterminer l'importance des

effets d'anharmonicité. Le potentiel de piège utilisé expérimentalement n'est en effet pas harmonique mais gaussien. A haute température, les particules ressentent donc les effets d'un piège anharmonique. La première conséquence expérimentale est la non vérification du théorème de Kohn : l'oscillation du centre de masse du gaz dans une direction n'a plus lieu à la fréquence du piège dans cette direction mais à une valeur plus faible. La connaissance analytique du potentiel de piège permet de simuler l'évolution du mode de Kohn dans un piège anharmonique et donc de vérifier que l'on retrouve ce résultat expérimental par la simulation. Une deuxième possibilité serait d'ajouter les effets de champ moyen dans notre simulation. Cette étude permettrait notamment d'affiner les résultats de la première partie de notre travail en s'affranchissant de la méthode des moments.

Annexe A

Calcul de I_S

L'intégrale de I_S entrant dans la définition du temps de relaxation peut être calculée plus facilement en observant que :

$$I_S = \frac{1}{10} \sum_{ij} I_{ijij}. \quad (\text{A.1})$$

L'expression de I_S s'écrit désormais :

$$I_S = \frac{1}{10} \int d\mathbf{r} d\mathbf{p} d\mathbf{p}_1 d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|}{m} f_{eq} f_{eq1} (1 - f'_{eq}) (1 - f'_{eq1}) \times [p^4 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1)^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'_1)^2]. \quad (\text{A.2})$$

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q} = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1}{2} \\ \mathbf{q}' = \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}'_1}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\mathbf{k} + 2\mathbf{q}}{2} \\ \mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{k} - 2\mathbf{q}}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{p}' = \frac{\mathbf{k} + 2\mathbf{q}'}{2} \\ \mathbf{p}'_1 = \frac{\mathbf{k} - 2\mathbf{q}'}{2} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

où l'on a toujours la norme du moment relatif qui est conservée : $|\mathbf{q}| = |\mathbf{q}'|$. A partir de ces variables, on peut évaluer les facteurs d'espace des phases :

$$\begin{aligned} f_{eq} f_{eq1} &= \left(\frac{1}{e^{\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)} + 1} \right) \left(\frac{1}{e^{\beta(\frac{p_1^2}{2m} - \mu)} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\exp\left(\beta\left[\frac{k^2 + 4q^2}{8m} - \mu\right]\right) (\exp[\beta\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m}] + \exp[-\beta\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m}]) + 1 + \exp\left(\beta\left[\frac{k^2 + 4q^2}{4m} - 2\mu\right]\right)} \\ &= \frac{1}{2 \exp\left(\beta\left[\frac{k^2 + 4q^2}{8m} - \mu\right]\right)} \frac{1}{\cosh(\beta(E - \mu)) + \cosh(\beta\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m})} \end{aligned}$$

avec $E = \frac{k^2 + 4q^2}{8m}$ et $\gamma = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{q})$. De même, on obtient aussi :

$$(1 - f'_{eq})(1 - f'_{eq1}) = \frac{1}{2 \exp\left(\beta\left[\frac{k^2 + 4q^2}{8m} - \mu\right]\right)} \cdot \frac{1}{\cosh(\beta(E - \mu)) + \cosh(\beta\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m})}$$

où l'on posé $\gamma' = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{q}')$. On obtient alors :

$$f_{eq} f_{eq1} (1 - f'_{eq})(1 - f'_{eq1}) = \frac{1}{4 (\cosh[\beta(E - \mu)] + \cosh[\beta\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2m}]) (\cosh[\beta(E - \mu)] + \cosh[\beta\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}'}{2m}])}$$

De plus, on évalue le terme contenant la dépendance en les moments :

$$\begin{aligned}
& 16 (p^4 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1)^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'_1)^2) \\
&= ((\mathbf{k} + 2\mathbf{q})(\mathbf{k} + 2\mathbf{q}))^2 + ((\mathbf{k} + 2\mathbf{q})(\mathbf{k} - 2\mathbf{q}))^2 - ((\mathbf{k} + 2\mathbf{q})(\mathbf{k} + 2\mathbf{q}'))^2 - ((\mathbf{k} + 2\mathbf{q})(\mathbf{k} - 2\mathbf{q}'))^2 \\
&= 32q^4 - 32(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2 + 8(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2 - 8(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}')^2 + 32q^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) - 32\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}')
\end{aligned}$$

soit

$$p^4 + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_1)^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}')^2 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'_1)^2 = 2q^4 - 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{2} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}')^2}{2} + [q^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}')].$$

Par intégration, les troisième et quatrième termes vont être nuls car ce sont des fonctions impaires de γ ; de même pour les deux derniers termes qui sont des fonctions impaires de \mathbf{k} . Seuls les deux premiers termes auront une contribution non nulle. On regarde donc l'intégration angulaire de ces termes. Pour cela, on utilise la relation :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2 &= q^4 (\sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta')^2 \\
&= q^4 (\sin^2 \theta \sin^2 \theta' [\cos^2 \phi \cos^2 \phi' + \sin^2 \phi \sin^2 \phi'] + \cos^2 \theta \cos^2 \theta')
\end{aligned}$$

où l'on a gardé que les termes dont l'intégration sur ϕ et ϕ' est non nulle. L'intégration angulaire donne :

$$2 \int d\phi d\phi' (q^4 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}')^2) = 4\pi^2 q^4 (1 + 2\gamma^2 - 3\gamma'^2).$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
I_S &= \frac{1}{20\pi^2 m} \int_0^\infty d\tilde{r} \tilde{r}^2 \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\infty dq q^7 \frac{d\sigma}{d\Omega} \int_{-1}^1 d\gamma \int_{-1}^1 d\gamma' (1 + 2\gamma^2 - 3\gamma^2 \gamma'^2) \\
&\quad \times \frac{1}{\cosh \beta(E - \mu_0) + \cosh \beta k q \gamma / 2m} \frac{1}{\cosh \beta(E - \mu_0) + \cosh \beta k q \gamma' / 2m}. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Ce calcul permet de réduire le nombre d'intégrations à effectuer, l'intégrale à 5 dimensions restante étant évaluée avec un algorithme de Monte Carlo.

Annexe B

Détermination de l'équation des modes

B.1 Mode ciseaux

Afin de réaliser les intégrations sur les moments, nous utiliserons les formules suivantes :

$$\nabla_{\mathbf{p}} f_{eq} = -\frac{\beta}{m} f_{eq} (1 - f_{eq}) \mathbf{p} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial f_{eq}}{\partial \mu} = \beta f_{eq} (1 - f_{eq}) \left(1 - \frac{\partial U_{eq}}{\partial \mu} \Big|_T \right) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial \dots}{\partial \mu} = -\frac{1}{m\bar{\omega}^2 \tilde{r}} \frac{\partial \dots}{\partial \tilde{r}} \quad (\text{B.3})$$

où $\mu = \mu(r) = \mu_0 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ est le potentiel chimique dans l'approximation de densité locale. Pour le mode ciseaux, l'ansatz est donné par :

$$\Phi = e^{-i\omega t} (c_1 xy + c_2 xp_y + c_3 y p_x + c_4 p_x p_y) . \quad (\text{B.4})$$

On l'injecte dans l'équation de Boltzmann :

$$f_{eq}(1 - f_{eq}) \dot{\Phi} + \nabla_{\mathbf{p}} f_{eq} \cdot \left[-\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\Phi}{\beta} + \frac{dU_{eq}}{d\rho_{eq}} \delta\rho \right) \right] + \nabla_{\mathbf{r}} f_{eq} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \frac{\Phi}{\beta} = -I[\Phi] \quad (\text{B.5})$$

puis on prend les moments, c'est-à-dire que l'on multiplie par $xy, xp_y, yp_x, p_x p_y$ et on intègre par rapport à $d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$. On commence donc le troisième terme (*iii*) $\equiv \nabla_{\mathbf{r}} f_{eq} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \frac{\Phi}{\beta}$ de l'équation de Boltzmann linéarisée :

$$\nabla_p \Phi = e^{-i\omega t} (c_3 y + c_4 p_y, c_2 x + c_4 p_x, 0) . \quad (\text{B.6})$$

Le premier moment vaut alors :

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (iii) xy &= \frac{e^{-i\omega t}}{\beta} \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{\partial f_{eq}}{\partial x} (c_3 y + c_4 p_y) + \frac{\partial f_{eq}}{\partial y} (c_2 x + c_4 p_x) \right\} xy \\
&= \frac{e^{-i\omega t}}{\beta} \int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ c_3 y \frac{\partial f_{eq}}{\partial x} + c_2 x \frac{\partial f_{eq}}{\partial y} \right\} xy \\
&= -\frac{e^{-i\omega t}}{\beta} \int d\mathbf{r} (c_3 y^2 + c_2 x^2) \rho_{eq} \\
&= -\frac{e^{-i\omega t}}{\beta} \int d\tilde{\mathbf{r}} \left(c_3 \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_y^2} \tilde{y}^2 + c_2 \frac{\bar{\omega}^2}{\omega_x^2} \tilde{x}^2 \right) \rho_{eq} \\
&= -\frac{e^{-i\omega t}}{\beta} \int d\tilde{\mathbf{r}} \bar{\omega}^2 \frac{\tilde{r}^2}{3} \rho_{eq} \left(\frac{c_3 \omega_x^2 + c_2 \omega_y^2}{\omega_x^2 \omega_y^2} \right) \\
&= -\frac{e^{-i\omega t}}{3m\beta} \left(\frac{c_3 \omega_x^2 + c_2 \omega_y^2}{\omega_x^2 \omega_y^2} \right) 2 \int d\tilde{\mathbf{r}} \rho_{eq} V_T \\
&= -\frac{e^{-i\omega t}}{m\beta} \left(\frac{c_3 \omega_x^2 + c_2 \omega_y^2}{\omega_x^2 \omega_y^2} \right) \frac{E_{pot}}{3}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Les contributions du terme (iii) aux moments de l'équation de Boltzmann sont alors :

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (iii) xy = -\frac{e^{-i\omega t}}{3\beta m} \frac{c_3 \omega_x^2 + c_2 \omega_y^2}{\omega_x^2 \omega_y^2} E_{pot} \tag{B.8}$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (iii) x p_y = -\frac{e^{-i\omega t}}{3\beta/m} c_4 E_{kin} \tag{B.9}$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (iii) y p_x = -\frac{e^{-i\omega t}}{3\beta/m} c_4 E_{kin} \tag{B.10}$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (iii) p_x p_y = 0. \tag{B.11}$$

Ensuite, on regarde le second terme (ii) du membre de gauche de l'équation de Boltzmann,

$$\nabla \Phi = e^{-i\omega t} (c_1 y + c_2 p_y, c_1 x + c_3 p_x, 0). \tag{B.12}$$

La variation de densité est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta \rho &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \delta f = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_{eq} (1 - f_{eq}) \Phi = e^{-i\omega t} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_{eq} (1 - f_{eq}) c_1 xy \\
&= \frac{c_1 xy}{\beta} e^{-i\omega t} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\partial f_{eq}}{\partial \mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial U_{eq}}{\partial \mu}\right)} \\
&= e^{-i\omega t} \frac{c_1}{\beta} xy \frac{\partial \rho_{eq}}{\partial \mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial U_{eq}}{\partial \mu}\right)} \\
&= -e^{-i\omega t} \frac{c_1}{\beta m \bar{\omega}^2 \tilde{r}} xy \frac{\partial \rho_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m \bar{\omega}^2 \tilde{r}} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}}\right)}. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

On peut alors calculer les moments pour le second terme $(ii) \equiv \nabla_{\mathbf{p}} f_{eq} \cdot \left[-\nabla_{\mathbf{r}} \left(\frac{\Phi}{\beta} + \frac{dU_{eq}}{d\rho_{eq}} \delta\rho \right) \right]$:

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (ii) xy = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (ii) xp_y = \frac{e^{-i\omega t} c_1}{3\beta m \omega_x^2} \varphi_2 E_{pot} \quad (\text{B.15})$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (ii) yp_x = \frac{e^{-i\omega t} c_1}{3\beta m \omega_y^2} \varphi_2 E_{pot} \quad (\text{B.16})$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (ii) p_x p_y = (c_2 + c_3) \frac{e^{-i\omega t}}{\beta/m} E_{kin} \quad (\text{B.17})$$

où le paramètre φ_2 est défini par :

$$\varphi_2 \equiv \frac{-m\bar{\omega}^2}{5E_{pot}} \int d\tilde{\mathbf{r}} \tilde{r}^3 \frac{\partial \rho_{eq} / \partial \tilde{r}}{1 + \frac{1}{m\bar{\omega}^2 \tilde{r}} \partial U_{eq} / \partial \tilde{r}} \quad (\text{B.18})$$

et vaut 1 pour $U = 0$. Enfin, pour le premier terme $(i) \equiv f_{eq}(1 - f_{eq})\dot{\Phi}$, on obtient :

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (i) xy = \frac{-i\omega c_1 e^{-i\omega t}}{3\beta m^2 \omega_x^2 \omega_y^2} \varphi_2 E_{pot} \quad (\text{B.19})$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (i) xp_y = \frac{-i\omega c_2 e^{-i\omega t}}{3\beta \omega_x^2} E_{pot} \quad (\text{B.20})$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (i) yp_x = \frac{-i\omega c_3 e^{-i\omega t}}{3\beta \omega_y^2} E_{pot} \quad (\text{B.21})$$

$$\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} (i) p_x p_y = \frac{-i\omega c_4 e^{-i\omega t}}{3\beta/m^2} E_{kin} . \quad (\text{B.22})$$

A l'aide de :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} I[p_x p_y] p_x p_y}{\frac{m^2}{\beta} E_{kin}/3} \quad (\text{B.23})$$

et en utilisant la théorème du viriel,

$$\frac{E_{kin}}{E_{pot}} = 1 - \chi \quad \text{avec} \quad \chi \equiv \frac{-3 \int d\tilde{\mathbf{r}} \tilde{x} \frac{\partial U_0}{\partial \tilde{x}} \rho_0}{E_{pot}} \quad (\text{B.24})$$

on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} i\omega \varphi_2 c_1 + m\omega_y^2 c_2 + m\omega_x^2 c_3 = 0 \\ c_1 \varphi_2 / m - i\omega c_2 - m(1 - \chi) \omega_x^2 c_4 = 0 \\ c_1 \varphi_2 / m - i\omega c_3 - m(1 - \chi) \omega_y^2 c_4 = 0 \\ (c_2 + c_3)/m + (\frac{1}{\tau} - i\omega) c_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

puis on prend le déterminant de la matrice pour obtenir l'équation des modes :

$$0 = \frac{i\omega}{\tau} [\omega^2 - \omega_h^2] + [\omega^2 - \omega_{c_1}^2] [\omega^2 - \omega_{c_2}^2] \quad (\text{B.26})$$

avec :

$$\begin{cases} \omega_{h,S}^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2) \\ \omega_{c+,S}^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2)(1 - \chi/2) + \sqrt{4\omega_x^2 \omega_y^2 (1 - \chi + \chi^2/8) + (\omega_x^4 + \omega_y^4) \chi^2/4} \\ \omega_{c-,S}^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2)(1 - \chi/2) - \sqrt{4\omega_x^2 \omega_y^2 (1 - \chi + \chi^2/8) + (\omega_x^4 + \omega_y^4) \chi^2/4} . \end{cases} \quad (\text{B.27})$$

	$x^2 + y^2$	z^2	$xp_x + yp_y$	zp_z	$p_x^2 + p_y^2$	p_z^2
$x^2 + y^2$	$\frac{2i\omega(1+\varphi_1)}{m^2\omega_r^2}$	$\frac{i\omega(1+\varphi_1)}{2m^2\omega_r^2}$	$\frac{1}{m}$	0	$i\omega$	$\frac{i\omega}{2}$
z^2	$\frac{2i\omega(1+\varphi_1)}{m^2\omega_r^2}$	$\frac{3i\omega(1+\varphi_1)}{m^2\omega_r^2}$	0	$\frac{2}{m}$	$2i\omega$	$i\omega$
$xp_x + yp_y$	$\frac{2(1+2\varphi_1-\varphi_3)}{m}$	$\frac{\varphi_1-\varphi_3}{m}$	$-i\omega$	0	$-2m\omega_r^2(1-2\chi+2\chi')$	$m\omega_r^2(\chi-2\chi')$
zp_z	$\frac{2(\varphi_1-\varphi_3)}{m}$	$\frac{2+3\varphi_1-\varphi_3}{m}$	0	$\frac{-i\omega}{\lambda^2}$	$2m\omega_r^2(\chi-2\chi')$	$-2m\omega_r^2(1-3/2\chi+\chi')$
$p_x^2 + p_y^2$	$\frac{i\omega}{m^2\omega_r^2(1-\chi)}$	$\frac{i\omega}{2m^2\omega_r^2(1-\chi)}$	$-\frac{1}{m}$	0	$2i\omega - \frac{1}{3\tau}$	$\frac{i\omega}{2} + \frac{1}{3\tau}$
p_z^2	$\frac{i\omega}{m^2\omega_r^2(1-\chi)}$	$\frac{i\omega}{2m^2\omega_r^2(1-\chi)}$	0	$-\frac{1}{m}$	$i\omega + \frac{2}{3\tau}$	$\frac{3}{2}i\omega - \frac{2}{3\tau}$

TAB. B.1 – Tableau donnant les moments de l'équation de Boltzmann pour le mode radial de respiration.

B.2 Mode radial quadrupolaire

Pour ce mode, l'ansatz est donné par :

$$\Phi = e^{-i\omega t} (c_1(x^2 - y^2) + c_2(xp_x - yp_y) + c_3(p_x^2 - p_y^2)) . \quad (\text{B.28})$$

De même que précédemment, on calcule les moments pour chaque terme. Le déterminant de la matrice donne alors l'équation :

$$0 = i\omega (\omega^2 - \omega_{Q,cl}^2) - \frac{1}{\tau} (\omega^2 - \omega_{Q,h}^2 - \omega^2) \quad (\text{B.29})$$

avec

$$\omega_{Q,cl}^2 = 2\omega_r^2(1 - \frac{\chi}{2}) \quad \text{et} \quad \omega_{Q,h}^2 = 2\omega_r^2 . \quad (\text{B.30})$$

B.3 Mode radial de respiration

Pour ce mode, l'ansatz est donné par :

$$\Phi = e^{-i\omega t} (c_1(x^2 + y^2) + c_2(xp_x + yp_y) + c_3(p_x^2 + p_y^2) + c_4p_z^2) . \quad (\text{B.31})$$

On considère un piège tel que $\omega_x = \omega_y = \omega_r$ et $\omega_z = \lambda\omega_r$. Dans le tableau (Tab B.3), chaque ligne est obtenue en prenant un moment de l'équation de Boltzmann. Par exemple, la première ligne représente le terme $\int d\mathbf{r} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} ((i) + (ii) + (iii)) \Phi(x^2 + y^2)$. Par ailleurs, chaque colonne représente un coefficient de la fonction test : ainsi la troisième colonne donne le terme $(1/m)$ présent devant le coefficient c_3 , donc généré par le terme $xp_x + yp_y$ de la fonction test Φ . On remarque que le coefficient λ apparaît uniquement pour le terme

zp_z . De plus, les nouveaux paramètres dépendent de l'interaction et sont définis par :

$$\chi' = \frac{3}{2E_{pot}} \int d\tilde{r} \rho_{eq}^2 \frac{\partial U_{eq}}{\partial \rho_{eq}}, \quad (B.32)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{5E_{pot}} \int d\tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \rho_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{\tilde{r}^2}{1 + \frac{\partial U_{eq}/\partial \tilde{r}}{m\tilde{\omega}^2 \tilde{r}}}, \quad (B.33)$$

$$\varphi_3 = -\frac{1}{E_{pot}} \int d\tilde{r} \frac{\partial U_{eq}}{\partial \tilde{r}} \frac{\rho_{eq} \tilde{r}}{1 + \frac{\partial U_{eq}/\partial \tilde{r}}{m\tilde{\omega}^2 \tilde{r}}}. \quad (B.34)$$

A partir du déterminant de la matrice 6×6 , on obtient l'équation des modes :

$$i\omega(\omega^2 - \omega_{B,cl+}^2)(\omega^2 - \omega_{B,cl-}^2) - \frac{1}{\tau}(\omega^2 - \omega_{B,hd+}^2)(\omega^2 - \omega_{B,hd-}^2) = 0 \quad (B.35)$$

où les fréquences limites du régime sans collision sont données par :

$$\omega_{cl\pm}^2 = \omega_r^2 \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b}}{16 + 25\varphi_1 - 25\chi(1 + \varphi_1)} \quad (B.36)$$

avec :

$$a = 25\chi^2(1 + \lambda^2)(1 + \varphi_1) + 2[\chi'(2 + \lambda^2)(8 + 5\varphi_1) + (1 + \lambda^2)(16 + 25\varphi_1) - 4(2 + \lambda^2)\varphi_3] \\ + \chi[-10\chi'(2 + \lambda^2)(1 + \varphi_1) - 3(1 + \lambda^2)(22 + 25\varphi_1) + 8(2 + \lambda^2)\varphi_3], \quad (B.37)$$

$$b = -4\lambda^2(2 - \chi)[16 + 25\varphi_1 - 25\chi(1 + \varphi_1)] \\ \times [32 + 50\varphi_1 + 25\chi^2(1 + \varphi_1) + 6\chi'(8 + 5\varphi_1) - 3\chi(22 + 25\varphi_1 + 10\chi'(1 + \varphi_1) - 8\varphi_3) - 24\varphi_3]; \quad (B.38)$$

et les fréquences limites du régime hydrodynamique :

$$\omega_{hd\pm}^2 = \omega_r^2 \frac{c \pm \sqrt{c^2 + d}}{3[16 + 25\varphi_1 - 25\chi(1 + \varphi_1)]}, \quad (B.39)$$

avec

$$c = 25\chi^2(2 + \lambda^2)(1 + \varphi_1) + 6\chi'(2 + \lambda^2)(8 + 5\varphi_1) + (5 + 4\lambda^2)(16 + 25\varphi_1) - 24(2 + \lambda)^2\varphi_3 \\ + \chi[-157 - 175\varphi_1 - 30\chi'(2 + \lambda^2)(1 + \varphi_1) + 48\varphi_3 + \lambda^2(-116 - 125\varphi_1 + 24\varphi_3)], \quad (B.40)$$

$$d = -36\lambda^2[16 + 25\varphi_1 - 25\chi(1 + \varphi_1)] \\ \times [32 + 50\varphi_1 + 25\chi^2(1 + \varphi_1) + 6\chi'(8 + 5\varphi_1) - 3\chi(22 + 25\varphi_1 + 10\chi'(1 + \varphi_1) - 8\varphi_3) - 24\varphi_3]. \quad (B.41)$$

On remarque que comme b et d sont proportionnels à λ , les fréquences limites ω_{cl-}^2 et ω_{hd-}^2 correspondant au mode de respiration axial tendent vers zéro pour un piège fortement allongé ($\lambda \rightarrow 0$). D'autre part, en l'absence de champ moyen ; $\chi = \chi' = \varphi_1 = \varphi_3 = 0$, les fréquences se réduisent à des expressions connues [52, 64] :

$$\omega_{cl\pm}^2 = 2\omega_r^2(1 + \lambda^2 \pm \sqrt{1 - 2\lambda^2 + \lambda^4}), \quad (B.42)$$

$$\omega_{hd\pm}^2 = \frac{\omega_r^2}{3}(5 + 4\lambda^2 \pm \sqrt{25 + 16\lambda^4 - 32\lambda^2}). \quad (B.43)$$

Annexe C

Coefficients de la matrice des moments d'ordre 4.

On calcule par exemple le terme m_{33} de la matrice des moments Eq. (4.95). Ce terme est donné par la relation :

$$m_{33} = \int \frac{d\mathbf{r}d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(1-f) (p_x^2 - p_y^2)^2 . \quad (\text{C.1})$$

On fait le changement de variable :

$$\begin{cases} \tilde{r} = \sqrt{\frac{\beta m \omega_0^2}{2}} r \\ \tilde{p} = \sqrt{\frac{\beta}{2m}} p, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

et on utilise le vecteur à 6 dimensions : $\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{p}})$ dont on note X_i les 6 composantes. Ces 6 composantes sont repérées dans l'espace à 6 dimensions par les angles ϕ_i tel que :

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos \phi_1 \\ X_2 &= X \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ X_3 &= X \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ X_4 &= X \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \cos \phi_4 \\ X_5 &= X \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \sin \phi_4 \cos \phi_5 \\ X_6 &= X \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3 \sin \phi_4 \sin \phi_5 . \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$m_{33} = \left(\frac{k_B T}{\omega_0} \right)^3 \frac{1}{\pi^3} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^2 \int d\mathbf{X} f(1-f) (X_4^2 - X_5^2)^2 \quad (\text{C.3})$$

$$= \left(\frac{k_B T}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{2m}{\beta} \right)^2 \alpha \int X^5 dX X^4 f(1-f) \quad (\text{C.4})$$

où $\alpha\pi^3$ est le résultat de l'intégration angulaire (on passe ainsi de $\int d\mathbf{X} (X_4^2 - X_5^2)^2$ à l'intégrale $\int X^5 dX X^4$. Explicitement :

$$\alpha\pi^3 = \int \prod_{i=1}^5 d\phi_i \sin^8 \phi_1 \sin^7 \phi_2 \sin^6 \phi_3 \sin \phi_4 (\cos^2 \phi_4 - \sin^2 \phi_4 \cos^2 \phi_5)^2 . \quad (\text{C.5})$$

On peut ensuite réduire l'intégrale en remarquant que :

$$\frac{df}{dX} = -2Xf(1-f). \quad (\text{C.6})$$

Le calcul du terme m_{33} est alors donné par :

$$m_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_B T}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{2m}{\beta} \right)^2 \alpha \int dX X^8 \left(-\frac{df}{dX} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{k_B T}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{2m}{\beta} \right)^2 \alpha \int 8X^7 f dX \quad (\text{C.8})$$

$$= 4 \frac{\alpha}{\alpha_{x^2}} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^2 \frac{\beta m \omega_0^2}{2} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} x^2 f \quad (\text{C.9})$$

$$= 4 \frac{m^3 \omega_0^2}{\beta} \langle x^2 \rangle \quad (\text{C.10})$$

car $\alpha = \frac{1}{12}$ et $\alpha_{x^2} = \frac{1}{6}$.

Bibliographie

- [1] S.N. Bose, Z.Phys., **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 3 (1925).
- [3] Gross E.P. Nuovo Cimento, **20**, 454 (1961).
- [4] Pitaevskii L.P. Zh. Eksp. Teor. Fys., **40**, 646 (1961).
- [5] Pitaevskii L.P. Sov. Phys. JETP, **13**, 451 (1961).
- [6] Inguscio, Stringari et Wieman, General review on Bose-Einstein condensed gases (1999).
- [7] S.Nascimbene, N.Navon, K.Jiang, L.Tarruell, M.Teichmann, J.McKeever, F.Chevy, C.Salomon, Phys. Rev. Lett. **103**, 18 (2009).
- [8] Y.Liao, A.S.C. Rittner, T.Paprotta, W.Li, G.B. Partridge, R.G. Hulet, S.K. Baur, E.J. Mueller, arXiv :cond-mat.quant-gas/0912.0092.
- [9] F. Zähringer, G. Kirchmair, R. Gerritsma, E. Solano, R. Blatt, C. F. Roos, Phys. Rev. Lett. **104**, 100503 (2010).
- [10] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt, C. F. Roos, Nature **463**, 68 (2010).
- [11] K. Blaum, Sz. Nagy, G. Werth, Phys. B : At. Mol. Opt. Phys. **42** :154015, (2009).
- [12] J.M. Obrecht, R.J. Wild, E.A. Cornell, Phys. Rev. A **75**, 062903 (2007).
- [13] Y.-J. Lin, R. L. Compton, A. R. Perry, W. D. Phillips, J. V. Porto, I. B. Spielman, Phys.Rev.Lett.**102** 130401 (2009).
- [14] N. Lundblad, J. M. Obrecht, I. B. Spielman et J. V. Porto, Nature Physics **5**, 575 - 580 (2009).
- [15] M. Capello, F. Becca, M. Fabrizio et S. Sorella, Phys. Rev. Lett. **99**, 056402 (2007).
- [16] R.Sensarma, D.Pekker, E.Altman, E.Demler, N.Strohmaier, D.Greif, R.Jördens, L.Tarruell, H.Moritz, T.Esslinger, Phys. Rev. Lett. **104**, 080401 (2010).
- [17] B. Wunsch, L. Fritz, N.T. Zinner, E. Manousakis, E. Demler Phys. Rev. A **81**, 013616 (2010).
- [18] C.S.Unnikrishnan talk at ICCIA10 Kolkata, January 2010.
- [19] S.Chiacchiera, T.Lepers, M.Urban, D.Davesne, Phys. Rev. A **79**, 033613 (2009).
- [20] B.Diu, C.Guthmann, D.Lederer, B.Roulet, *Physique Statistique* p892-904 (Hermann, Paris, 1993).
- [21] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, et E. A. Cornell, Science **269** (14 Juillet 1995).
- [22] M.W. Zwierlein, J.R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C.H. Schunck, W. Ketterle, Nature **435**, 1047-1051 (2005).

-
- [23] W.Ketterle et M. W. Zwierlein, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CLXIV, Varenna, 20 - 30 June 2006.
 - [24] J. Carlson, S. Y. Chang, V. R. Pandharipande, K. E. Schmidt, Phys. Rev. Lett, **91**, 50401 (2003).
 - [25] G.E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras, S. Giorgini, Phys. Rev. Lett. **93**, 200404 (2004).
 - [26] S. Y. Chang, J. Carlson, V. R. Pandharipande, K. E. Schmidt, Phys.Rev.A **70**, 043602 (2004).
 - [27] C. Cohen-Tannoudji , W. D. Phillips, Journal of Optics (1977-1998) Volume : 22, Issue : 6, November 01, 1991, pp. 281-290 : "Standing waves, atoms, and very low temperatures".
 - [28] A.G. Truscott, K.E. Strecker, W.I. McAlexander, G.B.Partridge et R.G.Hulet Science, **291**, 2570 (2001).
 - [29] R. Grimm, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", arXiv :cond-mat/0703091,(2007).
 - [30] M. Cozzini et S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **91**, 070401 (2003).
 - [31] M.J.Wright, S.Riedl, A.Altmeyer, C.Kohstall, E.R.Sánchez Guajardo, J.Hecker Denschlag et R.Grimm, Phys. Rev. Lett. **99** 150403 (2007).
 - [32] E. Taylor et A. Griffin, Phys. Rev. A **72**, 053630 (2005).
 - [33] M. Urban et P. Schuck, Phys. Rev. A **73**, 013621 (2006).
 - [34] M. Urban, Phys. Rev. A **75**, 053607 (2007).
 - [35] M. Urban, Phys. Rev. A **78**, 053619 (2008).
 - [36] Astrakharchik G.E, Combescot R., Leyronas X., et Stringari S., Phys. Rev. Lett. **95**, 030404 (2005).
 - [37] D. Guéri-Odelin, et S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **83**, 4452 (1999).
 - [38] M. Le Bellac, *Physique quantique* (CNRS Editions, 2003).
 - [39] C. Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë, *Mécanique quantique 2* (Hermann, Paris, 1973).
 - [40] A.Altmeyer, PhD thesis, Univ. Innsbruck.
 - [41] F. Ferlaino, S. Knoop et R. Grimm *Cold Molecules : Theory, Experiment, Applications* édité par R.V.Krems, B.Friedrich et W.C.Stwalley (2009).
 - [42] M. Houbiers, R. Ferwerda, H.T.C. Stoof, W.I. McAlexander, C.A. Sackett et R.G. Hulet, Phys. Rev. A **56**, 4864 (1997).
 - [43] P. Nozières et S. Schmitt-Rink, J. Low. Temp. Phys. **59**, 195 (1985).
 - [44] H. Heiselberg, Phys. Rev. A **63**, 043606 (2001).
 - [45] A.L. Fetter et J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).
 - [46] P. Pieri et G.C. Strinati, Phys. Rev. B **61**, 15 370 (2000).
 - [47] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
 - [48] A. Perali, P. Pieri, G.C. Strinati, et C. Castellani, Phys. Rev. B **66**, 024510 (2002).
 - [49] G. M. Bruun et H. Smith, Phys. Rev. A, **76**, 045602 (2007).
 - [50] P.Danielewicz, Ann. Phy. (N.Y)**152**, 239 (1984).

-
- [51] C.A.R. Sá de Melo, M. Randeria, et J.R. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
 - [52] P. Massignan, G.M. Bruun, et H. Smith, Phys. Rev. A **71**, 033607 (2005).
 - [53] G. M. Bruun, séminaire à l'IPNO - Orsay, April 2008.
 - [54] S.Riedl, E.R.Sánchez Guajardo, C.Kohstall, A.Altmeyer, M.J.Wright, J.Hecker Denschlag, R.Grimm, G. M. Bruun et H. Smith Phys. Rev. A **78**, 053609 (2008).
 - [55] G.M. Bruun et H. Smith, Phys. Rev. A **75**, 043612 (2007).
 - [56] J. Kinast, S.L. Hemmer, M.E. Gehm, A. Turlapov, et J.E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **92**, 150402 (2004).
 - [57] J. Kinast, A. Turlapov, et J.E. Thomas, Phys. Rev. A **70**, 051401(R) (2004).
 - [58] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, et R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
 - [59] A.Altmeyer, S.Riedl, M.J.Wright, C.Kohstall, J.Hecker Denschlag et R.Grimm, Phys. Rev. A **67** 033610 (2007).
 - [60] E. Guyon, J.P. Hulin, L.Petit, *Hydrodynamique physique*, CNRS Editions (2001).
 - [61] E.M. Lifshitz et L.P. Pitaevskii, *L.D. Landau et E.M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 10 : Physical Kinetics* (Pergamon, Oxford, 1981).
 - [62] L.Vichi, Journ. Low.Temp.Phys. **121**, 177 (2000).
 - [63] E.M. Lifshitz et L.P. Pitaevskii, *L.D. Landau et E.M. Lifshitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 9 : Physical Kinetics* (Pergamon, Oxford, 1980).
 - [64] P. Pedri, D. Guéri-Odelin, et S. Stringari, Phys. Rev. A **68**, 043608 (2003).
 - [65] C. Menotti, P. Pedri, et S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **89**, 250402 (2002).
 - [66] U. Al Khawaja, C. J. Pethick et H. Smith, Journ. Low. Temp. Phys. ,**118**, 127 (2000).
 - [67] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, et R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 203201 (2004).
 - [68] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, et S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
 - [69] L. Vichi et S. Stringari, Phys. Rev. A **60**, 4734 (1999).
 - [70] A. Altmeyer, S. Riedl, C. Kohstall, M.J. Wright, R. Geursen, M. Bartenstein, C. Chin, J. Hecker Denschlag, et R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **98**, 040401 (2007).
 - [71] W. Kohn, Phys. Rev. **123**, 1242 (1961).
 - [72] L. Brey, N.F. Johnson, et B.I. Halperin, Phys. Rev. B **40**, 10647 (1989).
 - [73] J.E.Thomas, J.Kinast et A.Turpalov, Proceedings of the 24th International Conference on Low Temperature Physics, AIP Conf. Proc. **850**, 69 (2006).
 - [74] D. Kremp, M. Bonitz, W.D. Kraeft, et M. Schlanges, Ann. Phys. (N.Y.) **258**, 320 (1997).
 - [75] T.Lepers, D.Davesne, S.Chiacchiera et M.Urban, soumis à Phys. Rev A.
 - [76] W.C. Swope, H.C. Andersen, P.H. Berens, et K.R. Wilson, J. Chem. Phys. **76**, 637 (1982).
 - [77] L. Verlet, Phys. Rev. **159**, 98 (1967).
 - [78] L.Viche, M.Inguscio, S.Stringari et G.M. Tino, J.Phys. B **31**, L899 (1998).

- [79] P. Vignolo, M.L. Chiofalo, S. Succi, M.P. Tosi, *Comp. J. Phys.* **182** (2002) 368.
- [80] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, et B.P. Flannery, *Numerical Recipes in FORTRAN : The Art of Scientific Computing*, 2nd edition (Cambridge University Press, 1992).
- [81] B.Jackson and E.Zaremba, *Phys. Rev. A* **66**, 033606 (2002).

NOM : LEPERS (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : Thomas		DATE de SOUTENANCE 25 juin 2010
TITRE : Etude dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids		
Numéro d'ordre : 113-2010		
DIPLOME DE DOCT.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT
X	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
DOCTORAT DE 3e CYCLE		Spécialité : Physique Nucléaire et Théorique
Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis		CLASSE :
RESUME : <p>Grace aux progrès énormes des techniques de refroidissement, des expériences actuelles avec des atomes fermioniques piégés atteignent des températures extrêmement basses de l'ordre du nanoKelvin. Le but principal de ces expériences est l'étude de la transition nommée "BEC-BCS crossover". Pour cela, on change le champ magnétique autour d'une résonance de Feshbach, ce qui implique que la longueur de diffusion change des valeurs répulsives (a positif), à travers la limite unitaire (a infini) aux valeurs attractives (a négatif). Du côté BEC, où le système forme un condensat de Bose-Einstein de molécules fortement liées, aussi bien que du côté BCS, où les atomes forment des paires de Cooper qui ont une grande extension par rapport à la distance moyenne entre les atomes, on s'attend à ce que le système devienne superfluide, à condition que la température soit inférieure à une certaine température critique. Afin de trouver des signes sans équivoque de la superfluidité, il est nécessaire de regarder des observables dynamiques comme l'expansion du nuage atomique lorsque le piège est éteint ou des oscillations collectives du nuage.</p> <p>Le travail effectué au cours de cette thèse est une étude de la dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids. Nous avons développé un modèle basé sur l'évaluation de la matrice T. L'utilisation de l'équation de transport de Boltzmann pour les particules permet ensuite une étude semi-numérique des modes collectifs dans tous les régimes d'interaction. Cette étude a permis de mettre en évidence pour la première fois que la fréquence du mode radial quadrupolaire est supérieure à deux fois la fréquence du piège, comme cela est vérifié expérimentalement et contrairement aux premières théories n'incluant pas les effets de champ moyen. Les résultats obtenus ont aussi mis en évidence la nécessité d'une résolution numérique complète de l'équation de Boltzmann et de l'amélioration des techniques de détermination des observables physiques du gaz. Cette résolution numérique de l'équation de Boltzmann a montré que la détermination du temps de relaxation par la méthode des moments est erronée de 30%, ce qui influe fortement sur la détermination de la fréquence et de l'amortissement du mode collectif. Enfin, l'amélioration de la méthode des moments, considérant l'ordre supérieur, permet d'améliorer sensiblement l'accord avec le résultat numérique. Une telle investigation n'avait jamais été réalisée et montre la nécessité de considérer les moments d'ordre supérieurs pour l'étude des modes collectifs par l'équation de Boltzmann d'un gaz de fermions dans la phase normale.</p>		
MOTS-CLES : BEC BCS crossover – Equation Boltzmann –mode collectif – méthode des moments – effets de milieu		
Laboratoire de recherche : Institut de Physique Nucléaire de Lyon		
Directeurs de recherches : Dany Davesne		
Président du jury : M. Ericson Composition du jury : J. Aichelin – P. Schuck – M. Urban – X. Leyronas		122 pages